1. Jogo com múltiplos

1.1. O jogo

Este jogo começa com dois montes constituídos por fichas. Dois jogadores retiram, um de cada vez, fichas de um dos montes, estando obrigados a tirar, em cada jogada, um número que seja um múltiplo do número de fichas do outro monte. O 1º jogador que não possa jogar perde.

Nota que cada jogador não tira necessariamente as fichas sempre do mesmo monte.

1.2. Jogando com o teu colega...

a) Decide com o teu colega qual o primeiro a jogar.

b) Joga com o teu colega várias vezes alterando de cada vez os números de fichas dos montes iniciais.

c) Repete o jogo para montes de **22** e **7** fichas.

d) Repete agora o jogo para montes de **6** e **6** fichas.

1.3. Algumas questões

a) Dá vários exemplos de montes em que o 1º jogador ganha logo (isto é à primeira jogada), saiba ou não jogar bem.

____

____

____

a.1) Quais os montes mais pequenos em que o 1º jogador ganha logo?

____

b) Faz dois montes de fichas - um com **10** e outro com **5**. Joga com o teu colega.

b.1) Com estes montes, é possível o 1º jogador ganhar logo? Porquê?

____

____

b.2) Com estes montes, é possível o 1º jogador (jogando mal) não ganhar? Porquê?

c) Dá vários exemplos de montes em que o 1º jogador ganha à primeira jogada, mas só se jogar bem.

d) Supõe que ambos os jogadores jogam bem:

d.1) Quais os montes mais pequenos em que o 1º perde?

d.2) Quais os montes mais pequenos em que o 1º ganha, mas não logo?

e) Quais são todos os montes em que o primeiro jogador não tem escolha de jogada e ganha logo?

f) Quais são todos os montes em que o primeiro jogador pode ganhar logo, mas só se jogar bem?

1.4. Anotando as tuas jogadas...

Se quiseres anotar as tuas jogadas anteriores, podes utilizar a página 10.

a) Faz dois montes de fichas - um com **13** e outro com **6** - e joga com o teu colega. No fim de cada jogada, anota na tabela abaixo o número de fichas de cada monte.

		Monte 1	Monte 2
jogador	**jogada**	**13**	**6**
1º	1ª		

Tenta jogar com o mesmo número de fichas, mas de outra forma diferente.

		Monte 1	Monte 2
jogador	**jogada**	**13**	**6**
1º	1ª		

Quem ganhou em cada caso? ____

____

Nota: *A partir de agora vamos supor que, em cada jogada, se o número de fichas de um monte for múltiplo do outro, o jogador em questão retira todas as fichas do monte maior e, assim, ganha o jogo com essa jogada.*

1.5. Qual é a melhor escolha?

Vamos agora ver que, num exemplo com **19** e **5** fichas, dependendo da maneira como ambos os jogadores jogam, tanto pode ser o primeiro jogador o vencedor como o segundo.

1º caso: O 1º jogador tira **15** fichas. A tabela deste jogo é

A		Monte 1	Monte 2
jogador	**jogada**	**19**	**5**
1º	1ª	4	5
2º	2ª	4	1
1º	3ª	0	1

a.1) Ganhou o 1º jogador. Achas que o 2º jogador tinha outra possibilidade de jogar? ____

____

2º caso: O 1º jogador tira **10** fichas. A tabela deste jogo é

B		**Monte 1**	**Monte 2**
jogador	**jogada**	**19**	**5**
1º	1ª	9	5
2º	2ª	4	5
1º	3ª	4	1
2º	4ª	0	1

a.2) Quem ganhou? Porquê (compara com a tabela do caso anterior)?

____

____

____

3º caso: O 1º jogador tira **5** fichas. O segundo jogador recebe, então, dois montes com **14** e **5** fichas respectivamente. E pode, agora, optar por tirar **5** ou **10** fichas.

i) Se o 2º jogador tirar 5 fichas:

C		**Monte 1**	**Monte 2**
jogador	**jogada**	**19**	**5**
1º	1ª	14	5
2º	2ª	9	5
1º	3ª	4	5
2º	4ª	4	1
1º	5ª	0	1

ii) Se o 2º jogador tirar 10 fichas:

D		**Monte 1**	**Monte 2**
jogador	**jogada**	**19**	**5**
1º	1ª	14	5
2º	2ª	4	5
1º	3ª	4	1
2º	4ª	0	1

Repara que, neste **3º caso**, o 2º jogador na 2ª jogada teve duas opções de jogo: escolhendo 5 fichas em 14, perdeu o jogo e escolhendo 10 em 14, ganhou o jogo.

b) Qual é a melhor escolha para o 1º jogador – tirar 15 fichas (**1º caso**), 10 fichas (**2º caso**) ou 5 fichas (**3º caso**)? Porquê?

____

____

____

____

1.6. Mais questões...

1.6.1 Pode haver empates?

Dados dois montes de fichas como nos exemplos anteriores, o jogo termina ao fim de um número (finito) de jogadas com um vencedor? Porquê?

____

____

____

1.6.2 Quem ganhou o jogo?

A Joana e a Maria jogaram este jogo. Abaixo está parte da tabela das anotações delas para cada jogada.

	Monte 1	**Monte 2**
jogada	**...**	**...**
1ª (Joana)	...	...
2ª (Maria)	...	...
...	...	...
36ª	3	1
37ª	0	1

a) Observa a tabela e diz quem ganhou. Porquê?

____

1.6.3. O João e a Ana jogaram um jogo, usando **21** e **13** fichas, sendo o João o primeiro a começar. Completa a tabela das jogadas da Ana e do João:

		Monte 1	Monte 2	Divisão	Nº de fichas que posso retirar
jogador	**jogada**	21	13	21 13 8 1	13=1x13
1º	1ª	8	13	13 8 5 1	8=1x8
2º	2ª				____=__x__
1º	3ª				____=__x__
2º	4ª				____=__x__
1º	5ª	1	2		____=__x__
2º	6ª	1	0		

a) Nas 4 primeiras jogadas o João e a Ana tiveram opção de jogo? Porquê?

---

b) Estes números **21** e **13** são mais favoráveis ao João ou à Ana? Porquê?

1.6.4. Estratégia vencedora

O João e a Ana jogaram de novo, agora com **33** e **10** fichas. O João foi o primeiro a jogar e ganhou.

Completa a tabela do jogo:

A		Monte 1	Monte 2	Divisão	Nº de fichas que posso retirar	Nº de fichas que vou tirar
jogador	jogada	33	10	33 | 10 ___ ___	10=1x10 20=2x10 30=3x10	20
1º	1ª	13	10	13 | 10 ___ ___	___=__x10	___
2º	2ª	3	10	10 | 3 ___ ___	___=__x3 ___=__x3 ___=__x3	___
1º	3ª	3	4	4 | 3 ___ ___	___=__x3	___
2º	4ª	3	1	3 | 1 ___ ___	3=3x1 2=2x1 1=1x1	___
1º	5ª	0	1			

a) Imagina que o João e a Ana repetiram o jogo, voltando o João a começar.

Preenche a tabela abaixo de modo que as duas tabelas (**A** e **B**) sejam diferentes uma da outra, quem vence o jogo seja a Ana (e não o João!) e, nas 2 últimas jogadas, os montes tenham o mesmo nº de fichas que tinham no jogo do quadro A.

B		Monte 1	Monte 2	Nº de fichas que posso retirar	Nº de fichas que vou retirar
jogador	**jogada**	33	10	______=_____x10 ______=_____x10 ______=_____x10	
1º	1ª				

1.6.5. Observa novamente os exemplos 2.6.3 e 2.6.4.

Repara que no exemplo 2.6.3 a Ana e o João só podiam jogar de uma maneira, enquanto no exemplo 2.6.4 havia várias possibilidades para o jogo.

Quando é que se dá a 1ª situação (2.6.3) e quando é que se dá a 2ª (2.6.4)?

____

____

____

1.7. Jogando com o computador...

Joga com o computador e tenta ganhar ao computador.

		Monte 1	Monte 2				Monte 1	Monte 2
jogador	**jogada**				**jogador**	**jogada**		
1º	1ª				1º	1ª		

2. Algoritmo de Euclides

Abre a página http://www.atractor.pt/mat/mdcEuclides/Euclides/euclides.html.

2.1. Introduz $a = 32$ e $b = 14$.

Identifica no rectângulo da imagem o lado do maior quadrado que lá cabe.

Quantos quadrados destes cabem no rectângulo?

2.1.1. Efectua a divisão inteira de 32 por 14 e identifica na figura o quociente e o resto dessa divisão.

2.1.2. Efectua a divisão inteira de 14 por 4 e identifica na figura o quociente e o resto dessa divisão.

2.1.3. Efectua a divisão inteira de 4 por 2 e identifica na figura o quociente dessa divisão.

2.1.4. Tendo em conta as alíneas anteriores, completa as igualdades seguintes:

$32 = \_\_\_\times 14 + \_\_\_$

$14 = \_\_\_\times 4 + \_\_\_$

$4 = \_\_\_\times \_\_\_$

2.2. Introduz $a = 38$ e $b = 22$.

2.2.1. Identifica na figura o quociente e o resto da divisão de:

2.2.1.1. 38 por 22;

2.2.1.2. 16 por 6.

2.2.2. A partir da imagem completa as igualdades:

$38 = \_\_\_ \times 22 + \_\_\_$

$22 = \_\_\_ \times \_\_\_ + \_\_\_$

$16 = \_\_\_ \times 6 + \_\_\_$

$6 = \_\_\_ \times \_\_\_ + \_\_\_$

$4 = \_\_\_ \times \_\_\_$

2.3. Foram introduzidos no applet os valores de *a* e *b* e obtiveram-se as seguintes igualdades:

$54 = 1 \times \_\_\_ + 20$

$\_\_\_ = 1 \times 20 + 14$

$20 = 1 \times 14 + 6$

$\_\_\_ = \_\_\_ \times \_\_\_ + \_\_\_$

$\_\_\_ = \_\_\_ \times \_\_\_$

2.3.1. Indica os valores de *a* e de *b*.

2.3.2. Completa as igualdades anteriores.

2.4. Escreve os passos do algoritmo para os seguintes pares de números:

2.4.1. 4 e 8;

2.4.2. 5 e 8;

2.4.3. 6 e 8.

2.5. Sejam *a* e *b* inteiros positivos com $a \geq b$ e chama *q* ao quociente da divisão de *a* por *b* e *r* ao resto dessa divisão.

2.5.1. Qual é maior: *r* ou *b*?

2.5.2. Completa:

$$a = \_\_\_ \times b + \_\_\_, \quad 0 \leq \_\_\_ < \_\_\_.$$

2.5.2.1. O que significa $r = 0$?

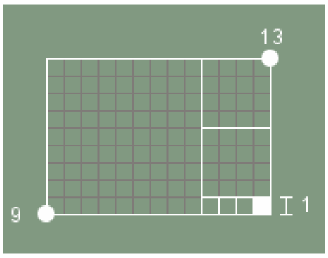
2.5.2.2. O que significa $q > 1$?

2.6. Existem alguns valores de *a* e de *b* para os quais o quociente do último passo do algoritmo seja 1? Justifica.

Sugestão:

Começa por supor que no penúltimo passo do algoritmo dividimos *z* por *x* e temos a seguinte igualdade: $z = q \times x + y$. Qual é a igualdade do último passo, se o quociente da divisão de *x* por *y* for 1? A partir daqui, justifica que não é possível o quociente *q* ser 1.

2.7. Imagina que vais jogar o jogo dos múltiplos, com montes de 9 e 13 fichas.



2.7.1. Usando a imagem anterior, responde às seguintes questões:

2.7.1.1. Quantas fichas pode tirar o primeiro jogador na sua 1.ª jogada?

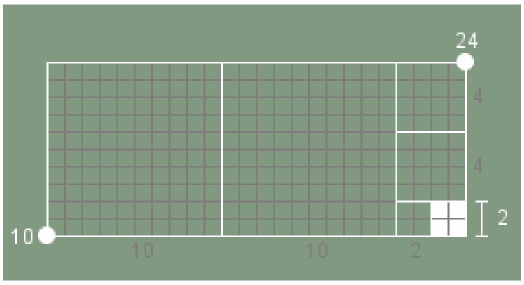
2.7.1.2. Quantas fichas pode tirar o segundo jogador na sua 1.ª jogada?

2.7.1.3. Qual é o número mínimo de jogadas necessárias para terminar o jogo?

2.7.1.4. Qual é o número máximo de jogadas que se podem efectuar durante o jogo?

2.7.1.5. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar? Feita essa escolha, como jogarias de modo a garantires que vencias o jogo?

2.8. Imagina que, agora, vais jogar o jogo dos múltiplos, com montes de 10 e 24 fichas.



2.8.1. Usando a imagem anterior, responde às seguintes questões:

2.8.1.1. Quantas fichas pode tirar o primeiro jogador na sua 1.ª jogada?

2.8.1.2. Qual é o número mínimo de jogadas necessárias para terminar o jogo?

2.8.1.3. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar? Feita essa escolha, como jogarias de modo a garantires que vencias o jogo?

2.9. Quando o jogo termina, um dos montes tem um determinado número de fichas.

Qual é a relação entre esse número de fichas e os números de fichas que inicialmente tinham os montes?

3. Uso do programa “régua e compasso” (C.a.R.)

Grava os exercícios em ficheiros separados.

3.1. Constrói:

a) uma recta *r*;

b) um ponto *P* exterior à recta *r*;

c) uma recta paralela à recta *r* e que passe por *P*; chama-lhe *s* e pinta-a de verde.

d) uma recta perpendicular à recta *r* e que passe por *P*; chama-lhe *t*, pinta-a de azul e desenha-a a tracejado.

3.2. Constrói um quadrado [*ABCD*] de lado 4 cm.

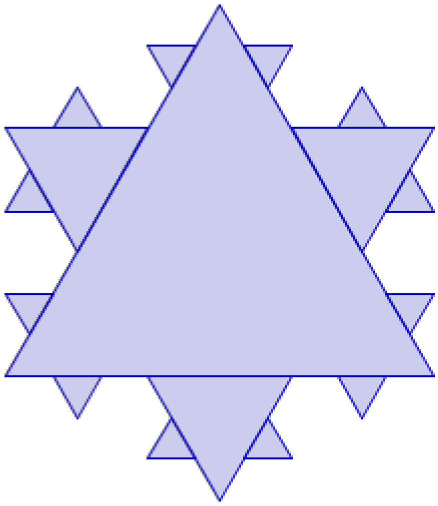
3.3. Constrói um triângulo de vértices fixos *R*=(0,0) e *S*=(3,0) e vértice *T* (manipulável). Escreve uma expressão *P* que indique o seu perímetro.

3.4. Constrói a recta horizontal *h* que passa pelos pontos (0,-2) e (4,-2). Marca um ponto *I* em *h*. Mostra as coordenadas de *I*. Altera as propriedades de *I*, de forma a garantir que a abcissa seja inteira

3.5. Define uma macro, de nome *triangulo*, que permita dados dois pontos construir um triângulo equilátero de que eles são vértices.

3.6. Define uma macro, de nome *divisao*, que, aplicada a um segmento de recta [*AB*], nele determine dois pontos que o dividem em três intervalos de iguais comprimentos.

3.7. Utilizando as macros construídas em 5 e 6, constrói um floco de neve de Koch (como o da figura abaixo), com pelo menos 2 iterações.



4. Algoritmo de Euclides (construção com o C.a.R.)

Segue os passos a seguir indicados, escondendo no fim da cada passo as construções auxiliares.

- **constrói:**
    - *O*: ponto fixo na origem do referencial
    - [*OH*]: segmento horizontal de comprimento 40
    - [*OV*]: segmento vertical de comprimento 20
    - *A*: ponto manipulável em [*OH*]
    - *B*: ponto manipulável em [*OV*]
- esconde os segmentos [*OH*], [*OV*] e os pontos *H* e *V*

- **constrói:**
    - [*OACB*]: rectângulo
    - *a*: expressão que indica o comprimento de [*OA*]
    - *b*: expressão que indica o comprimento de [*OB*]
- altera as propriedades de *A* e de *B* de forma a que *a* e *b* sejam inteiros

- **constrói:**
    - [*OA'C'B*] maior quadrado que cabe em [*OACB*]
    - *q1*: expressão que indica o número inteiro de vezes que o quadrado acima cabe no rectângulo inicial

      nota: dado um número real *x*, chamamos característica de *x* ao maior inteiro que não excede *x*; esta função denota-se por [*x*] e no programa corresponde à função *floor(x)*
- move *A* e/ou *B* de forma a que *q1* seja maior que 1

- **constrói:**

    - *n1*: expressão que indica o comprimento do lado maior do rectângulo máximo que cabe em [*OACB*] composto por quadrados com as dimensões de [*OA'C'B*]
    - [*OX*]: segmento de comprimento *n1*, com *X* em [*OA*].
    - *R1*: rectângulo [*OXYB*]
- pinta o rectângulo *R1* de azul

R1 é o rectângulo retirado no primeiro passo do algoritmo de Euclides

Agora é preciso repetir o procedimento sucessivamente nos rectângulos que sobram. Para isso vais criar uma macro a partir da construção que fizeste.

Construção da macro:

Dados:

O = vértice inicial,

A= vértice do lado maior,

B= vértice do lado menor,

Pedidos:

- constroi *X*, *Y*, *R1*

Nome: alg_euclides

(não incluir construções intermediárias e não ocultar cópias)

Aplicação da macro:

Muda a cor para verde e aplica o alg_euclides ao rectângulo [*CAXY*]. Alternando entre o azul e o verde, aplica o algoritmo sucessivamente (até chegares ao sexto passo) aos rectângulos que restam. Se necessário, move os pontos *A* e *B* de forma a alterar os valores de *a* e de *b* para permitir mais passos no algoritmo.

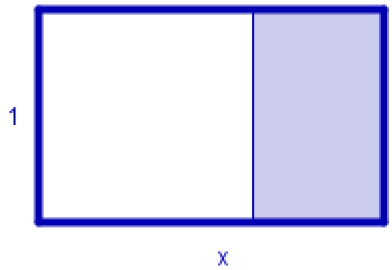
Divisão em quadrados dos rectângulos construídos:

Carrega a macro dividir_rec.mcr. Esta macro permite dividir um rectângulo em quadrados máximos. Aplica-a a cada um dos seis rectângulos que obtiveste na tua construção.

Agora, utilizando a ferramenta de desenho livre, podes jogar o jogo dos múltiplos com o teu colega, fazendo cruzes ou bolas sobre os quadrados que querem retirar.

5. Número de Ouro

5.1.



5.1.1. Considera:

i) um rectângulo de dimensões 1 e *x*, sendo *x* um número entre 1 e 2;

ii) um quadrado contido no rectângulo, como na figura;

iii) um rectângulo, como o sombreado na figura, obtido quando retiramos o quadrado ao rectângulo inicial.

Indica, em função de *x*, as dimensões do rectângulo menor.

5.1.2. Determina o valor de *x* tal que a razão entre o lado maior e o lado menor do rectângulo inicial é igual à razão entre o lado maior e o lado menor do rectângulo menor.

Este x especial denomina-se por número de ouro *e, no que se segue, será designado por* Φ.

5.2.

5.2.1. Constrói no C.a.R os rectângulos descritos em **5.1.1.** e escreve expressões que dêem os comprimentos dos seus lados. Manipulando os vértices do rectângulo maior, procura uma posição em que te pareça que o rectângulo grande e o pequeno têm aproximadamente as mesmas proporções. Regista o correspondente valor de *x*.

5.2.2. Constrói as expressões que indiquem as razões dos rectângulos da tua construção e, tendo em conta os valores encontrados, manipula o rectângulo, procurando novamente uma aproximação de Φ. Regista o valor de *x*.

5.2.3. Introduz o valor exacto que obtiveste em **5.1.2.** e verifica que as razões anteriores são, de facto, iguais. Grava o ficheiro com o nome *rectangulo_ouro*.

5.3. Deduz, a partir da questão **5.1.1.**, que o número de ouro satisfaz a igualdade $1+\dfrac{1}{\Phi}=\Phi$.

Podemos usar a propriedade anterior e escrever Φ na seguinte forma:

$$\Phi = 1+\frac{1}{\Phi} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}} = \ldots$$

5.4. Sejam $c_1=1$, $c_2=1+\dfrac{1}{1}$, $c_3=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$, ..., números que se obtêm da tabela anterior suprimindo nas parcelas o número $\dfrac{1}{\Phi}$. Calcula c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6.

5.5. Sem repetires os cálculos desde o início, diz quais são os valores de c_7 e de c_8.

5.6. Os números c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 e c_8, que na questão 4 aparecem escritos na forma $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1}}}$, podem, também, escrever-se na forma $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2}}}$.

Escreve os números c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 e c_8 nesta última forma.

Nota: Se um número está escrito na forma $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\ddots}}}$, diz-se que *a* está no primeiro degrau, *b* no segundo degrau, *c* no terceiro degrau , ….

5.7. Supondo cada um dos números c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 e c_8 escrito sob a forma $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2}}}$, em alguns deles o algarismo 2 aparece num degrau ímpar e noutros aparece num degrau par.

Em quais dos números c_3, c_4,...,c_8, o 2 aparece num degrau ímpar? Esses números são maiores ou menores do que Φ?

E os números em que o 2 aparece num degrau par são maiores ou menores do que Φ?

5.8. Usando o C.a.R, representa numa recta orientada, os pontos de abcissa c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 e c_8 e observa a posição relativa deles. É possível mostrar que

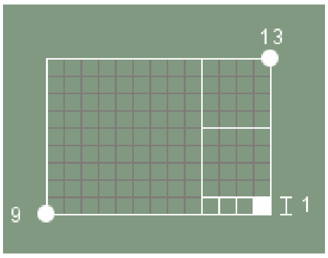
$$[c_1, c_2] \supset [c_3, c_4] \supset [c_5, c_6] \supset [c_7, c_8] \supset \ldots$$

e que a amplitude destes intervalos tende para zero, pelo que só há um número contido em todos eles – o número Φ.

Isso permite que possamos escrever Φ sob a forma

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

6. Fracções continuadas



Das igualdades

$$13 = 1\times 9 + 4$$
$$9 = 2\times 4 + 1$$
$$4 = 4\times 1 + 0$$

sugeridas pela figura ao lado, deduz que podemos escrever o número $\frac{13}{9}$ da seguinte forma:

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1 + \frac{1}{\frac{9}{4}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}.$$

A expressão $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}$ diz-se a fracção continuada de $\frac{13}{9}$.

6.1. Escreve a fracção continuada dos seguintes números:

a) $\frac{45}{16}$;

b) $\frac{19}{14}$;

c) $\frac{8}{5}$;

d) $\frac{16}{45}$.

6.2. Abre o applet do algoritmo de Euclides, e a partir da observação desse applet escreve a fracção continuada dos seguintes números:

a) $\frac{23}{10}$;   **b)** $\frac{15}{24}$;

c) $\frac{26}{7}$.

6.3. Imagina que vais jogar o jogo dos múltiplos com montes com 45 e 16 fichas. A partir da análise da fracção continuada de $\frac{45}{16}$, responde às seguintes questões:

6.3.1. Quantas fichas pode tirar o primeiro jogador na sua 1.ª jogada?

6.3.2. Qual é o número mínimo de jogadas necessárias para terminar o jogo?

6.3.3. Qual é o número máximo de jogadas que se podem efectuar durante o jogo?

6.3.4. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar?

6.4. Imagina que, agora, vais jogar o jogo dos múltiplos com montes com 19 e 14 fichas. A partir da análise da fracção continuada de $\frac{19}{14}$, responde às seguintes questões:

6.4.1. Quantas fichas pode tirar o primeiro jogador na sua 1.ª jogada?

6.4.2. Qual é o número mínimo de jogadas necessárias para terminar o jogo?

6.4.3. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar?

6.5. Imagina que vais jogar o jogo dos múltiplos com montes com 8 e 5 fichas. A partir da análise da fracção continuada de $\frac{8}{5}$, responde às seguintes questões:

6.5.1. Qual é o número mínimo de jogadas necessárias para terminar o jogo?

6.5.2. Qual é o número máximo de jogadas que se podem efectuar durante o jogo?

6.5.3. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar?

7. Estratégia Final

7.1. Compara os seguintes números (sem os escreveres como fracções):

a) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ e $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}$;

b) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ e $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$;

c) $2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ e $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}$;

d) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ e $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$;

e) $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$ e Φ;

f) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$ e Φ;

g) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$ e Φ.

7.2.

7.2.1. Se $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$ for a fracção continuada do quociente do número de fichas de cada um dos montes, algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora? E quem ganha?

7.2.2. E se for $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$?

7.2.3. E se for $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$, algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora? Se sim, que estratégia?

7.2.4. E se for $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$, algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora? Se sim, que estratégia?

7.3. Compara os seguintes números:

a) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$ e $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$;

b) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$ e $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$;

c) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$ e Φ.

7.4.

7.4.1. Através da observação da fracção continuada do quociente do número de fichas de cada um dos montes, como se conclui qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora?

7.4.2. Como se relaciona a paridade do degrau onde aparece o primeiro algarismo maior do que 1 com o número Φ?

7.4.3. Como posso saber qual o jogador que tem uma estratégia vencedora, através de uma comparação com o número de ouro?

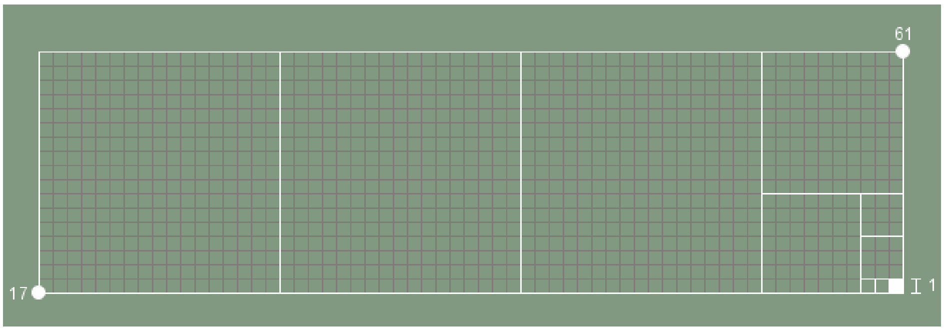
7.5. Imagina que vais jogar o jogo dos múltiplos com montes de 43 e 18 fichas.

7.5.1. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar?

7.5.2. Feita essa escolha, como jogarias de modo a garantires que vencias o jogo?

7.6. Imagina que vais jogar o jogo dos múltiplos com montes de 61 e 17 fichas.

A partir da análise da imagem abaixo, responde às seguintes questões:



7.6.1. Se pudesses escolher querias ser o primeiro ou o segundo a jogar?

7.6.2. Feita essa escolha, como jogarias de modo a garantires que vencias o jogo?

7.7. Imagina que vais jogar o jogo dos múltiplos com montes de 23 e 9 fichas.

Sabendo que $\frac{23}{9} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}$, responde às seguintes questões:

7.7.1. Se pudesses escolher, querias ser o primeiro ou o segundo a jogar?

7.7.2. Feita essa escolha, como jogarias de modo a garantires que vencias o jogo?