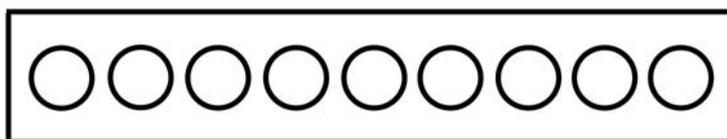


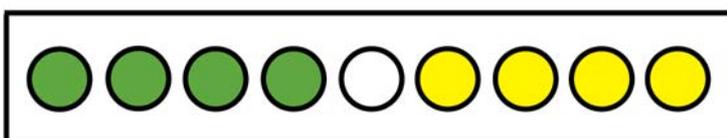
1. Jogo dos saltos

1.1. O jogo

Neste jogo parte-se de um tabuleiro com um número ímpar de discos (no caso da figura abaixo são 9), dispostos em linha,

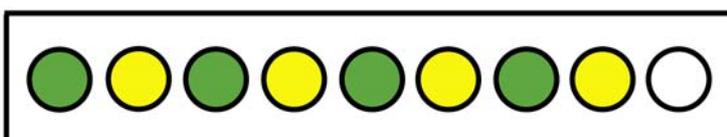


e por um conjunto de fichas de 2 cores diferentes (amarelas e verdes). No início do jogo, as fichas estão colocadas no tabuleiro desta forma:



- o disco do meio está vazio;
- o número de fichas verdes tem que ser igual ao número de fichas amarelas;
- os discos à esquerda do disco do meio estão ocupados com fichas de uma das cores e os discos à direita com as fichas da outra cor.

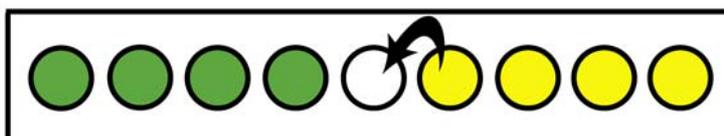
O jogo termina quando todas as fichas ficarem dispostas alternadamente (uma amarela, uma verde,...).

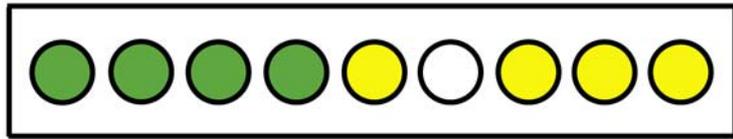


Mas só são permitidos dois tipos de movimentos:

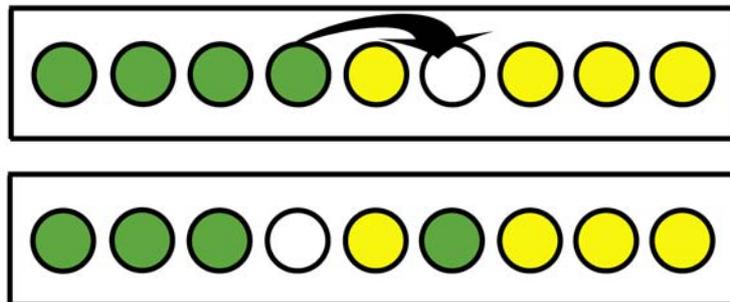
- **arrastar**: corresponde a mover uma ficha para um disco vazio adjacente à posição que ela ocupa.

Por exemplo, se arrastares uma ficha amarela, esse movimento chamar-se-á **amarelo-arrasta**.

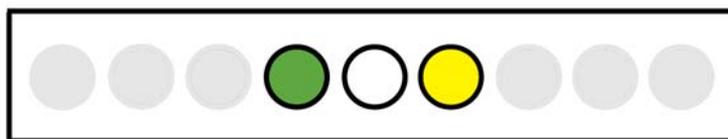




- **saltar:** corresponde a mover uma ficha para um disco vazio, saltando por cima de outra (e só uma) de cor diferente. Por exemplo, se saltares uma ficha verde por cima de outra (que tem que ser amarela), esse movimento chamar-se-á **verde-salta**.



No que se segue, vamos jogar este jogo com 3, 5, 7 e 9 discos. Como os tabuleiros de madeira disponíveis têm 9 discos, ignoram-se os das pontas. Por exemplo, num jogo com 3 discos, só se consideram os 3 do meio.



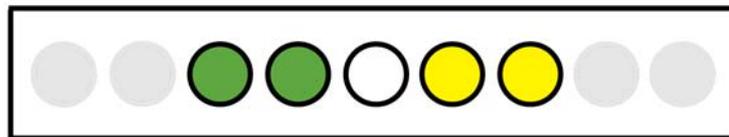
1.2. Experimenta jogar apenas com uma ficha de cada cor, tal como está representado na figura anterior.

1.2.1 Com o auxílio dos discos representados abaixo, regista o(s) movimento(s) que efectuaste, utilizando lápis de duas cores diferentes. Na coluna livre, regista o nome do movimento.

1.2.2 Quantos movimentos tiveste que efectuar para terminar o jogo?

Em resumo: Uma vez que, no caso de haver apenas uma ficha de cada cor, é possível terminar o jogo com 1 único movimento, conclui-se que 1 é o número **mínimo** de movimentos para acabar este jogo.

1.3. Experimenta agora jogar com 2 fichas de cada cor, tal como na figura:



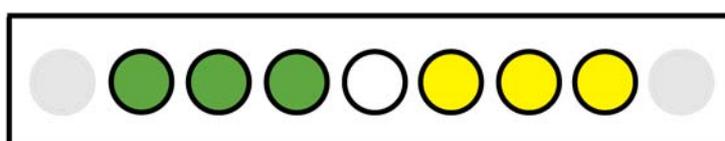
1.3.1 Mais uma vez, com o auxílio dos discos representados abaixo, regista o(s) movimento(s) que efectuaste, utilizando lápis de duas cores diferentes.

1.3.2 Quantos movimentos tiveste que efectuar para terminar o jogo? Se usaste mais do que 3 movimentos, tenta agora usar apenas 3.

1.3.3 Verifica agora que 3 é o número **mínimo** de movimentos de que precisas para terminar o jogo, quando existem só 2 fichas de cada cor.

1.4. Tenta agora com 3 fichas de cada cor, começando tal como está indicado na figura:



1.4.1 Regista outra vez os teus movimentos, tal como fizeste nas alíneas anteriores:

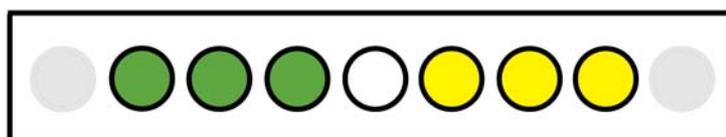
1.4.2 Quantos movimentos usaste para resolver o jogo? Achas que é possível terminar o jogo com menos movimentos?

Se sim, tenta jogar novamente e regista os teus passos na tabela abaixo:

De seguida, vamos ver qual o número mínimo de movimentos necessários para resolver este jogo.

Começamos o jogo da seguinte forma:



Não seria difícil concluir que o número mínimo de movimentos é conseguido começando por alternar as cores das 4 fichas centrais deixando as fichas das pontas imóveis.

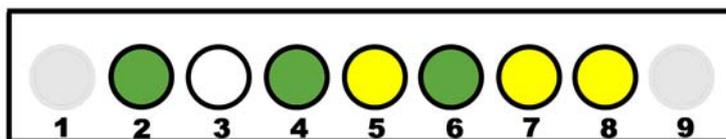
Já vimos, na alínea 1.3.3, que o número mínimo de movimentos para fazer isso é 3, como está ilustrado na seguinte tabela:

Começando a jogar com as fichas amarelas¹:	
	amarelo-arrasta
	verde-salta
	verde-arrasta

Já temos as 4 fichas centrais alternadas. No entanto, é ainda necessário alterná-las com as 2 das pontas.

Na situação em que parámos o jogo, temos 3 jogadas possíveis:

¹ Se começares a jogar com as fichas verdes, os movimentos são parecidos, apenas se trocam as cores.



1. Jogada: Arrastar a ficha 4 para o disco 3.

↪ Esta jogada iria anular a jogada anterior.

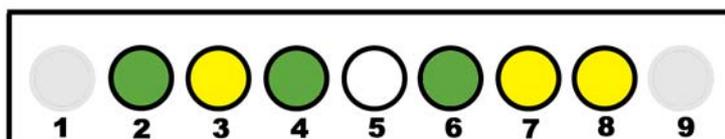
2. Jogada: Arrastar a ficha 2 para o disco 3.

↪ Esta jogada não é útil uma vez que se a fizéssemos, na jogada seguinte o único movimento possível iria anulá-la.

3. Jogada: Saltar a ficha 5 para o disco 3.

↪ Esta será a melhor jogada. Com este movimento conseguimos já colocar a ficha verde da ponta alternada com duas das fichas centrais.

Obtemos então a seguinte situação:



Pensando de forma semelhante à anterior, qual pensas ser agora a melhor jogada a efectuar? De forma a justificares a tua opção, preenche os seguintes espaços:

1. Jogada: _____



2. Jogada: _____



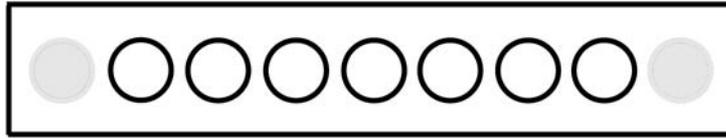
3. Jogada: _____



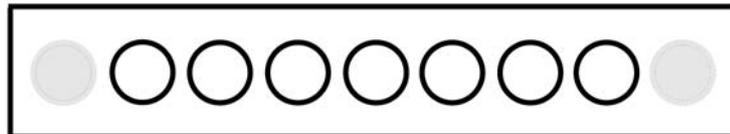
4. Jogada: _____



Desenha a posição a que chegaste segundo a jogada que escolheste.



Obtiveste uma situação em que é bastante fácil ver qual a jogada que te permite resolver o jogo. Desenha essa posição.

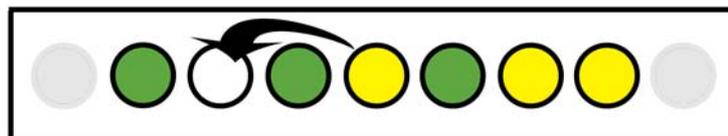


A partir do momento em que tinhas as 4 fichas centrais alternadas, quantos movimentos mais efectuaste até resolveres o jogo?

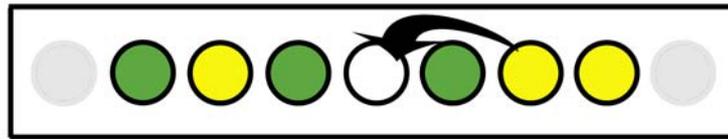
Sendo assim, ao todo, qual o número mínimo de movimentos necessários para resolver um jogo com 3 fichas de cada cor?

Conclusão: Para resolveres um jogo com um número mínimo de movimentos podes usar a seguinte estratégia:

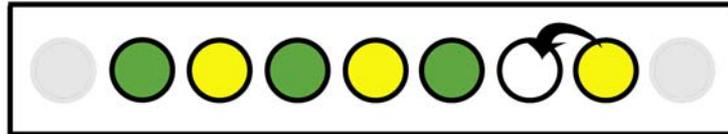
- Começar por alternar as fichas centrais, deixando as das pontas imóveis.
- Usar o disco livre adjacente a uma das fichas das pontas para efectuar o único salto possível.



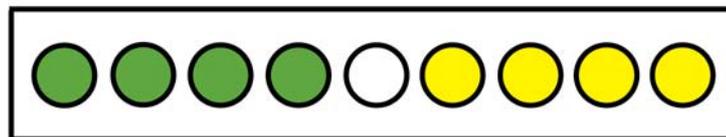
- Usar o disco que ficou livre na última jogada para efectuar o salto possível no mesmo sentido do anterior. No caso de um jogo com mais de 3 peças de cada cor, continuamos a jogar da mesma forma até que todas as fichas fiquem alternadas, excepto a da ponta oposta.



- Arrastar a ficha que falta para resolver o jogo.



1.5. Depois de saberes quais os movimentos para 1, 2 e 3 fichas de cada cor, vais descobrir quais os movimentos para 4 fichas de cada cor.



1.5.1 Recorrendo à estratégia que usaste no caso anterior, tenta resolver este jogo e regista todos os teus movimentos na tabela seguinte:

<input type="text"/>		<input type="text"/>	
<input type="text"/>		<input type="text"/>	
<input type="text"/>		<input type="text"/>	
<input type="text"/>		<input type="text"/>	
<input type="text"/>		<input type="text"/>	

1.5.2 Quantos movimentos usaste para alternar as 6 fichas centrais?

A partir do momento em que tinhas as 6 fichas centrais alternadas, quantos movimentos mais efectuaste até resolveres o jogo?

Sendo assim, ao todo, qual o número mínimo de movimentos necessários para resolver um jogo com 4 fichas de cada cor?

1.6. Baseando-te nos casos que acabaste de resolver, completa a seguinte tabela:

Nº de fichas de cada cor	Nº mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	6
4	10
5	
6	
7	
8	
9	
10	
(...)	(...)

1.7. Suponhamos que queríamos determinar o número mínimo de movimentos que seriam necessários para resolver o jogo com 1000 fichas de cada cor.

1.7.1 Indica de forma sucinta as operações numéricas a efectuar para encontrar esse número.

1.7.2 Provavelmente, indicaste uma soma com muitas parcelas. Serás capaz de agrupar essas parcelas duas a duas para simplificar as contas? Se precisares de ajuda, não hesites em pedir indicações à tua monitora.

2. Jogo com múltiplos

2.1. O jogo

Este jogo começa com dois montes constituídos por fichas. Dois jogadores retiram, um de cada vez, fichas de um dos montes, estando obrigados a tirar, em cada jogada, um número que seja um múltiplo do número de fichas do outro monte. O 1º jogador que não possa jogar perde.

Nota que cada jogador não tira necessariamente as fichas sempre do mesmo monte.

2.2. Jogando com o teu colega...

a) Decide com o teu colega qual o primeiro a jogar.

b) Joga com o teu colega várias vezes alterando de cada vez os números de fichas dos montes iniciais.

c) Repete o jogo para montes de **22** e **7** fichas.

d) Repete agora o jogo para montes de **6** e **6** fichas.

2.3. Algumas questões

a) Dá vários exemplos de montes em que o 1º jogador ganha logo (isto é à primeira jogada), saiba ou não jogar bem.

a.1) Quais os montes mais pequenos em que o 1º jogador ganha logo?

b) Faz dois montes de fichas - um com **10** e outro com **5**. Joga com o teu colega.

b.1) Com estes montes, é possível o 1º jogador ganhar logo? Porquê?

b.2) Com estes montes, é possível o 1º jogador (jogando mal) não

ganhar? Porquê?

c) Dá vários exemplos de montes em que o 1º jogador ganha à primeira jogada, mas só se jogar bem.

d) Supõe que ambos os jogadores jogam bem:

d.1) Quais os montes mais pequenos em que o 1º perde?

d.2) Quais os montes mais pequenos em que o 1º ganha, mas não logo?

e) Quais são todos os montes em que o primeiro jogador não tem escolha de jogada e ganha logo?

f) Quais são todos os montes em que o primeiro jogador pode ganhar logo, mas só se jogar bem?

2.4. Anotando as tuas jogadas...

Se quiseres anotar as tuas jogadas anteriores, podes utilizar a página 10.

a) Faz dois montes de fichas - um com **13** e outro com **6** - e joga com o teu colega. No fim de cada jogada, anota na tabela abaixo o número de fichas de cada monte.

		Monte 1	Monte 2
jogador	jogada	13	6
1 ^o	1 ^a		

Tenta jogar com o mesmo número de fichas, mas de outra forma diferente.

		Monte 1	Monte 2
jogador	jogada	13	6
1 ^o	1 ^a		

Quem ganhou em cada caso? _____

Nota: A partir de agora vamos supor que, em cada jogada, se o número de fichas de um monte for múltiplo do outro, o jogador em questão retira todas as fichas do monte maior e, assim, ganha o jogo com essa jogada.

2.5. Qual é a melhor escolha?

Vamos agora ver que, num exemplo com **19** e **5** fichas, dependendo da maneira como ambos os jogadores jogam, tanto pode ser o primeiro jogador o vencedor como o segundo.

1^o caso: O 1^o jogador tira **15** fichas. A tabela deste jogo é

A		Monte 1	Monte 2
jogador	jogada	19	5
1 ^o	1 ^a	4	5
2 ^o	2 ^a	4	1
1 ^o	3 ^a	0	1

a.1) Ganhou o 1º jogador. Achas que o 2º jogador tinha outra possibilidade de jogar? _____

2º caso: O 1º jogador tira **10** fichas. A tabela deste jogo é

B		Monte 1	Monte 2
jogador	jogada	19	5
1º	1ª	9	5
2º	2ª	4	5
1º	3ª	4	1
2º	4ª	0	1

a.2) Quem ganhou? Porquê (compara com a tabela do caso anterior)?

3º caso: O 1º jogador tira **5** fichas. O segundo jogador recebe, então, dois montes com **14** e **5** fichas respectivamente. E pode, agora, optar por tirar **5** ou **10** fichas.

i) Se o 2º jogador tirar 5 fichas:

C		Monte 1	Monte 2
jogador	jogada	19	5
1º	1ª	14	5
2º	2ª	9	5
1º	3ª	4	5
2º	4ª	4	1
1º	5ª	0	1

ii) Se o 2º jogador tirar 10 fichas:

D		Monte 1	Monte 2
jogador	jogada	19	5
1º	1ª	14	5
2º	2ª	4	5
1º	3ª	4	1
2º	4ª	0	1

Repara que, neste **3º caso**, o 2º jogador na 2ª jogada teve duas opções de jogo: escolhendo 5 fichas em 14, perdeu o jogo e escolhendo 10 em 14, ganhou o jogo.

b) Qual é a melhor escolha para o 1º jogador – tirar 15 fichas (**1º caso**), 10 fichas (**2º caso**) ou 5 fichas (**3º caso**)? Porquê?

2.6. Mais questões...

2.6.1 Pode haver empates?

Dados dois montes de fichas como nos exemplos anteriores, o jogo termina ao fim de um número (finito) de jogadas com um vencedor? Porquê?

2.6.2 Quem ganhou o jogo?

A Joana e a Maria jogaram este jogo. Abaixo está parte da tabela das anotações delas para cada jogada.

	Monte 1	Monte 2
jogada
1ª (Joana)
2ª (Maria)
...
36ª	3	1
37ª	0	1

a) Observa a tabela e diz quem ganhou. Porquê?

2.6.3. O João e a Ana jogaram um jogo, usando **21** e **13** fichas, sendo o João o primeiro a começar. Completa a tabela das jogadas da Ana e do João:

		Monte 1	Monte 2	Divisão	Nº de fichas que posso retirar
jogador	jogada	21	13	$\begin{array}{r} 21 \quad 13 \\ 8 \quad 1 \end{array}$	$13=1 \times 13$
1º	1ª	8	13	$\begin{array}{r} 13 \quad 8 \\ 5 \quad 1 \end{array}$	$8=1 \times 8$
2º	2ª			$\begin{array}{r} \quad \\ \quad \end{array}$	___ = ___ x ___
1º	3ª			$\begin{array}{r} \quad \\ \quad \end{array}$	___ = ___ x ___
2º	4ª			$\begin{array}{r} \quad \\ \quad \end{array}$	___ = ___ x ___
1º	5ª	1	2	$\begin{array}{r} \quad \\ \quad \end{array}$	___ = ___ x ___
2º	6ª	1	0		

a) Nas 4 primeiras jogadas o João e a Ana tiveram opção de jogo? Porquê?

b) Estes números **21** e **13** são mais favoráveis ao João ou à Ana? Porquê?

2.6.4. Estratégia vencedora

O João e a Ana jogaram de novo, agora com **33** e **10** fichas. O João foi o

primeiro a jogar e ganhou.

Completa a tabela do jogo:

A		Monte 1	Monte 2	Divisão	Nº de fichas que posso retirar	Nº de fichas que vou tirar
jogador	jogada	33	10	$\begin{array}{r} 33 \quad \quad 10 \\ \hline \end{array}$	$10=1 \times 10$ $20=2 \times 10$ $30=3 \times 10$	20
1º	1ª	13	10	$\begin{array}{r} 13 \quad \quad 10 \\ \hline \end{array}$	___ = __x10	___
2º	2ª	3	10	$\begin{array}{r} 10 \quad \quad 3 \\ \hline \end{array}$	$___ = __ \times 3$ $___ = __ \times 3$ $___ = __ \times 3$	___
1º	3ª	3	4	$\begin{array}{r} 4 \quad \quad 3 \\ \hline \end{array}$	___ = __x3	___
2º	4ª	3	1	$\begin{array}{r} 3 \quad \quad 1 \\ \hline \end{array}$	$3=3 \times 1$ $2=2 \times 1$ $1=1 \times 1$	___
1º	5ª	0	1			

a) Imagina que o João e a Ana repetiram o jogo, voltando o João a começar.

Preenche a tabela abaixo de modo que as duas tabelas (**A** e **B**) sejam diferentes uma da outra, quem vence o jogo seja a Ana (e não o João!) e, nas 2 últimas jogadas, os montes tenham o mesmo nº de fichas que tinham no jogo do quadro A.

B		Monte 1	Monte 2	Nº de fichas que posso retirar	Nº de fichas que vou retirar
jogador	jogada	33	10	_____ = _____ x10 _____ = _____ x10 _____ = _____ x10	
1º	1ª				

2.6.5. Observa novamente os exemplos 2.6.3 e 2.6.4.

Repara que no exemplo 2.6.3 a Ana e o João só podiam jogar de uma maneira, enquanto no exemplo 2.6.4 havia várias possibilidades para o jogo.

Quando é que se dá a 1ª situação (2.6.3) e quando é que se dá a 2ª (2.6.4)?

2.7. Jogando com o computador...

Joga com o computador e tenta ganhar ao computador.

Elaborado pelo Atractor para a Universidade Júnior (Universidade do Porto) Julho 2007

<http://www.atractor.pt>

