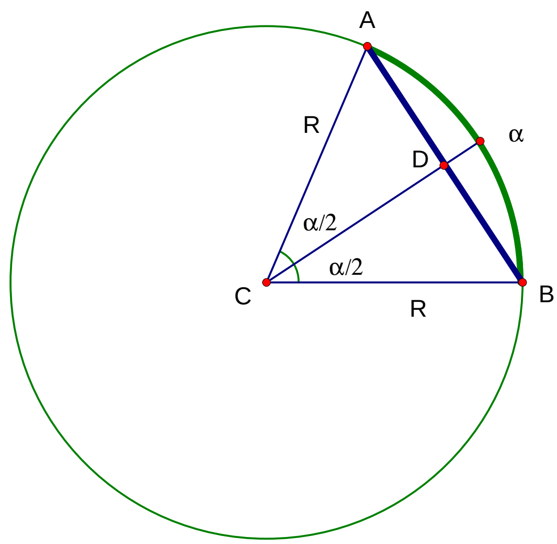
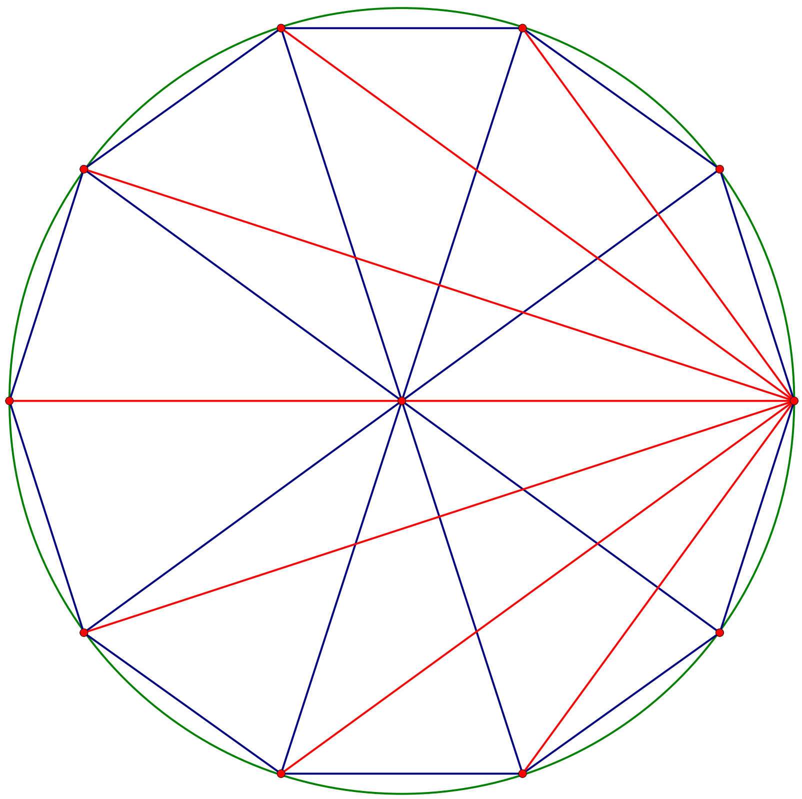
Fórmula para a razão entre as diagonais e o lado

Em primeiro lugar, analisemos qual a relação entre o comprimento de uma corda $[AB]$ de uma circunferência de raio R e a amplitude do respectivo arco de circunferência, designada por α. Temos:



$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AC}\sin\frac{\alpha}{2} + \overline{CB}\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

Dado um polígono regular, notemos que as suas diagonais são cordas da circunferência que circunscreve o polígono que correspondem a arcos cuja amplitude é um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{n}$. Mais propriamente, a k-ésima diagonal mais curta é a corda correspondente a um arco de amplitude $(k+1).\frac{2\pi}{n} = \frac{2(k+1)\pi}{n}$. Logo, a sua medida é $2R\sin\frac{(k+1)\pi}{n}$.



Por sua vez, o lado do polígono é a corda correspondente a um arco de amplitude $\frac{2\pi}{n}$, logo a sua medida é $2R\sin\frac{\pi}{n}$. Sendo assim, a razão entre a k-ésima diagonal mais curta do polígono e o seu lado é dada por:

$$\frac{2R\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{2R\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

Por exemplo, se $k = 1$, temos que a razão entre a diagonal mais curta do polígono e o seu lado é dada por:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = 2\cos\frac{\pi}{n}$$

A razão entre as diagonais seguintes e o lado é dada por:

$k=2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \\
&= \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n} = \\
&= 2\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n} = \\
&= 2\cos^2\frac{\pi}{n}+2\cos^2\frac{\pi}{n}-1 = \\
&= 4\cos^2\frac{\pi}{n}-1 = \\
&= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2-1
\end{aligned}$$

$k=3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{4\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= \frac{2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{4\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \\
&= 4\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} = \\
&= 4\cos\frac{\pi}{n}\left(2\cos^2\frac{\pi}{n}-1\right) = \\
&= 8\cos^3\frac{\pi}{n}-4\cos\frac{\pi}{n} = \\
&= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^3-2\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

$k=4$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{5\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \\
&= \frac{\sin\frac{4\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n} = \\
&= \left(8\cos^3\frac{\pi}{n}-4\cos\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}+2\cos^2\frac{2\pi}{n}-1 = \\
&= 8\cos^4\frac{\pi}{n}-4\cos^2\frac{\pi}{n}+2\left(2\cos^2\frac{\pi}{n}-1\right)^2-1 = \\
&= 8\cos^4\frac{\pi}{n}-4\cos^2\frac{\pi}{n}+2\left(4\cos^4\frac{\pi}{n}-4\cos^2\frac{\pi}{n}+1\right)-1 = \\
&= 16\cos^4\frac{\pi}{n}-12\cos^2\frac{\pi}{n}+1 \\
&= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^4-3\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+1
\end{aligned}$$

Mais geralmente, temos:

$$\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = f_k\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

onde $f_k(x)$ é um polinómio mónico de coeficientes inteiros de grau k. Este resultado pode ser visto por indução:

- Para $k=1$, temos:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = 2\cos\frac{\pi}{n} = f_1\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

onde $f_1(x) = x$ é um polinómio de grau 1.

- Dado um inteiro $k \geqslant 2$, sejam $f_{k-1}(x)$ e $f_{k-2}(x)$ dois polinómios mónicos, de coeficientes inteiros, de grau $k-1$ e $k-2$, respectivamente, tais que:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= f_{k-1}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)\\ \frac{\sin\frac{(k-1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= f_{k-2}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} =\\ &= \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n} =\\ &= f_{k-1}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}\sin\frac{(k+1)\pi}{n} &= \sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right) = \sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} =\\ &= \sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} =\\ &= \sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)+2\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\\ &= \sin\frac{(k-1)\pi}{n}+2\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{(k-1)\pi}{n}+2\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} =\\ =\quad & \frac{\sin\frac{(k-1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}+2\cos\frac{k\pi}{n} = f_{k-2}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)+2\cos\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

Portanto, vem:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= 2\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \\
&= 2\left[f_{k-1}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{k\pi}{n}\right] - \left[f_{k-2}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right) + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right] = \\
&= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right) f_{k-1}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right) - f_{k-2}\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right) = \\
&= f_k\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

onde $f_k(x) = xf_{k-1}(x) - f_{k-2}(x)$ é um polinómio mónico de coeficientes inteiros e de grau k.

Sendo assim, dados os polinómios iniciais $f_0(x) = 1$ e $f_1(x) = x$, podemos calcular explicitamente os polinómios seguintes $f_k(x)$, com $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 1 \\
f_1(x) &= x \\
f_2(x) &= xf_1(x) - f_0(x) = x.x - 1 = x^2 - 1 \\
f_3(x) &= xf_2(x) - f_1(x) = x.(x^2-1) - x = x^3 - 2x \\
f_4(x) &= xf_3(x) - f_2(x) = x.(x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 1
\end{aligned}$$

(verifique que os polinómios assim obtidos estão de acordo com os cálculos efectuados anteriormente)

Nota: alternativamente, poderíamos ter deduzido a fórmula para a razão entre a k-ésima diagonal mais curta do polígono e o seu lado utilizando números complexos. Se $t = e^{\frac{\pi i}{n}}$, então $\left(t^2\right)^n = t^{2n} = 1$, ou seja, t^2 é uma raiz de índice n da unidade e todas as raízes de índice n da unidade são da forma $\left(t^2\right)^k$, com $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Além disso, estas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados centrado na origem. Assim, fixando o vértice $t^0 = 1$, a k-ésima diagonal mais curta do polígono dado pode ser calculada pela distância desse ponto ao ponto $\left(t^2\right)^{k+1} = t^{2k+2}$. Esta distância é dada por:

$$\begin{aligned}
&d^2 = \left|1 - t^{2k+2}\right|^2 = \left(1 - t^{2k+2}\right)\overline{\left(1 - t^{2k+2}\right)} = \left(1 - t^{2k+2}\right)\left(1 - t^{-2k-2}\right) = \\
&= 2 - t^{2k+2} - t^{-2k-2} = -\left(\left(t^{k+1}\right)^2 - 2 + \left(t^{-k-1}\right)^2\right) = -\left(t^{k+1} - t^{-k-1}\right)^2
\end{aligned}$$

Notemos agora que:

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{(k+1)\pi}{n} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{(k+1)\pi}{n}i} - e^{-\frac{(k+1)\pi}{n}i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\left(e^{\frac{\pi}{n}i}\right)^{k+1} - \left(e^{\frac{\pi}{n}i}\right)^{-k-1}\right) = \\
&= \frac{1}{2i}\left(t^{k+1} - t^{-k-1}\right) \implies t^{k+1} - t^{-k-1} = 2i\sin\frac{(k+1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

Logo, vem:

$$d^2 = -\left(t^{k+1} - t^{-k-1}\right)^2 = -\left(2i\sin\frac{(k+1)\pi}{n}\right)^2 = 4\sin^2\frac{(k+1)\pi}{n} \implies$$
$$\implies d = 2\sin\frac{(k+1)\pi}{n}$$

O lado, por sua vez, é dado por:

$$d^2 = \left|1-t^2\right|^2 = \left(1-t^2\right)\overline{\left(1-t^2\right)} = \left(1-t^2\right)\left(1-t^{-2}\right) = 2 - t^2 - t^{-2} =$$
$$= -\left(t^2 - 2 + t^{-2}\right) = -\left(t - t^{-1}\right)^2 = -\left(2i\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 = 4\sin^2\frac{\pi}{n} \implies$$
$$\implies d = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

Portanto, a razão entra as duas grandezas é, como vimos, $\frac{2\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$.