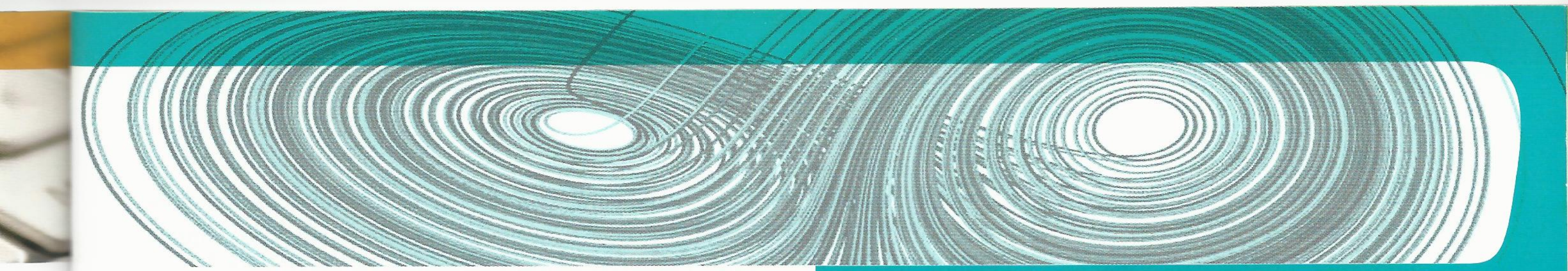

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

RECICLANDO O ERRO

Se cancelarmos o algarismo 6 que é comum ao numerador e ao denominador da fração 64/16, obtemos $\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}} = \frac{4}{1}$, e de facto 64/16 = 4. Analogamente, $\frac{\cancel{9}8}{4\cancel{9}} = 2$ e $\frac{\cancel{6}5}{2\cancel{6}} = \frac{5}{2}$. Contudo, em geral, este é um procedimento incorreto. Para que frações é válido?

Comecemos pelas frações com dois algarismos no numerador e no denominador. Evitando casos triviais (como $\frac{5\cancel{0}}{2\cancel{0}}$) e juntando depois as frações recíprocas, bastará dar atenção às frações $\frac{\cancel{c}a}{b\cancel{c}}$ em que a, b e c são distintos dois a dois e $a, b, c \in \{1, \ldots, 9\}$. A igualdade

$$\frac{\cancel{c}a}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

é equivalente a $10\,bc = (9\,b + c)a$ e daqui concluímos que, além de casos triviais, as frações na base 10 deste tipo que permitem o cancelamento são 95/19, 98/49, 64/16 e 65/26, e as correspondentes recíprocas 19/95, 49/98, 16/64 e 26/65.

Este problema pode colocar-se em qualquer outra base $\beta \geq 2$ que não a decimal, sendo agora os algarismos a, b, c de $\{1, \ldots, \beta - 1\}$. O Atractor programou uma rotina para determinar as frações canceláveis não triviais para bases entre 2 e 100. Da análise da lista de frações assim obtida pudemos conjeturar alguns resultados gerais sobre estas frações. Em [1] pode ler-se uma versão mais completa deste texto em que se demonstram as propriedades que enunciaremos de seguida.

Suponhamos que a base β é um número primo. O cancelamento na fração $\frac{\cancel{c}a}{b\cancel{c}}$ é válido se e só se $\beta(c-a)b = a(c-b)$. Como $c = a$ se e só se $a = b = c$, e, sendo $c \neq a$, o primo β não divide nem a nem $c - b$, concluímos que, quando a base é um primo, não há frações canceláveis não triviais nessa base. Pelo contrário, quando β é um natural composto há sempre frações canceláveis

β	β-1	d	$F(\beta)$	Recíprocas
4	3	2	$\frac{32}{13}$	$\frac{13}{32}$
6	5	2,3	$\frac{54}{25}, \frac{53}{15}$	$\frac{25}{54}, \frac{15}{53}$
8	7	2,4	$\frac{76}{37}, \frac{74}{17}$	$\frac{37}{76}, \frac{17}{74}$
9	8	3	$\frac{86}{28}, \frac{43}{14}$	$\frac{28}{86}, \frac{14}{43}$
10	9	2,5	$\frac{98}{49}, \frac{95}{19}, \frac{64}{16}, \frac{65}{26}$	$\frac{49}{98}, \frac{19}{95}, \frac{16}{64}, \frac{26}{65}$
12	11	2,3 4,6	$\frac{11\ 10}{5\ 11}, \frac{11\ 9}{3\ 11}$ $\frac{11\ 8}{2\ 11}, \frac{11\ 6}{1\ 11}$	$\frac{5\ 11}{11\ 10}, \frac{3\ 11}{11\ 9}$ $\frac{2\ 11}{11\ 8}, \frac{1\ 11}{11\ 6}$
14	13	2,7	$\frac{13\ 12}{6\ 13}, \frac{13\ 7}{1\ 13}$	$\frac{6\ 13}{13\ 12}, \frac{1\ 13}{13\ 7}$
15	14	3,5	$\frac{14\ 12}{4\ 14}, \frac{14\ 10}{2\ 14}, \frac{7\ 6}{2\ 7}$ $\frac{7\ 5}{1\ 7}, \frac{12\ 10}{3\ 12}, \frac{12\ 9}{2\ 12}$	$\frac{4\ 14}{14\ 12}, \frac{2\ 14}{14\ 10}, \frac{2\ 7}{7\ 6}$ $\frac{1\ 7}{7\ 5}, \frac{3\ 12}{12\ 10}, \frac{2\ 12}{12\ 9}$

Figura 1. Tabela.

não triviais, e o seu número depende essencialmente da quantidade de divisores próprios de β e do facto de $\beta - 1$ ser ou não primo. São vários os processos que permitem criar frações canceláveis não triviais, mas temos também um algoritmo, que descreveremos, para obter todas elas em qualquer base. A tabela da figura 1 mostra alguns exemplos, designando-se por $\mathcal{F}(\beta)$ o conjunto de todas as frações canceláveis não triviais na base β sem contar com as recíprocas.

Fixemos um natural composto β. Para cada divisor $1 < d < \beta$ de β, é imediato verificar que é cancelável e não trivial a fração ca/bc com $a = \beta - d$, $b = \beta/d - 1$ e

$c = \beta - 1$. Por exemplo, se $\beta = 4$, então $d = 2$, criando-se com este processo a fração $^{3\,2}/_{1\,3}$. Se $\beta = 9$, então $d = 3$, e obtemos a fração cancelável $^{8\,6}/_{2\,8}$. Quando $\beta = 16$, o divisor d pode ser 2, 4 ou 8, e encontramos

$$\frac{15\ 14}{7\ \ 15}, \frac{15\ 12}{3\ \ 15} \text{ e } \frac{15\ \ 8}{1\ \ 15}.$$

Podemos acrescentar que, se β é composto e $\beta - 1$ é primo, as frações canceláveis $\frac{\cancel{c}a}{b\cancel{c}}$ assim criadas a partir dos divisores próprios de β são as únicas canceláveis não triviais nessa base (além das suas recíprocas).

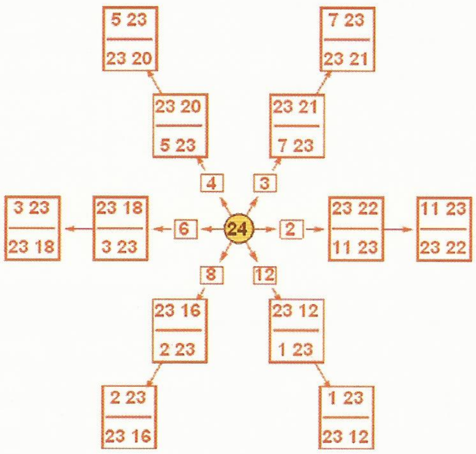

Figura 2. Frações canceláveis não triviais na base 24.

E, portanto, para estes valores de β, sabemos exatamente quantas frações canceláveis existem nessa base, e quais são. O grafo da figura 2 mostra todas essas frações para a base 24.

Consideremos agora uma base β que seja um natural composto tal que $\beta - 1$ também é composto. Neste caso, há outras frações canceláveis além das obtidas pelo processo descrito anteriormente, como indica o gráfico de barras da figura 3, que reúne, para alguns valores de β, o número total $\mathcal{N}(\beta)$ de frações não triviais canceláveis na base β e as suas recíprocas. Repare-se, por exemplo, que $\beta = 21$ tem apenas dois divisores próprios mas $\mathcal{N}(21) = 20$; e que $\beta = 49$ só tem um divisor próprio e também se tem $\mathcal{N}(49) = 20$.

Efetivamente, se β e $\beta - 1$ são compostos, para que uma fração $\frac{\cancel{c}a}{b\cancel{c}}$ seja cancelável não trivial têm de existir um primo p, divisor comum de $\beta - 1$ e de c, e naturais $1 \leq m \leq \frac{\beta-1}{p}$ e $1 \leq \ell < c$ tais que $\frac{ca}{a+\beta\ell}$ é um número natural, e

$$a = c - \ell, b = \frac{ca}{a + \beta\ell} \text{ e } c = pm.$$

Esta escrita de a, b, c a partir dos dados p, m, ℓ não é, em geral, única (por exemplo, se $\beta = 15$, então o divisor primo $p = 7$ de 14, $m = 2$ e $\ell = 2$ constroem a fração cancelável $\frac{14\ 12}{4\ 14}$, que também é obtida com o divisor primo $p = 2$ de 14, $m = 7$ e $\ell = 2$). E, sempre que o quociente $\frac{ca}{a+\beta\ell}$ é um natural, este algoritmo produz uma fração cancelável não

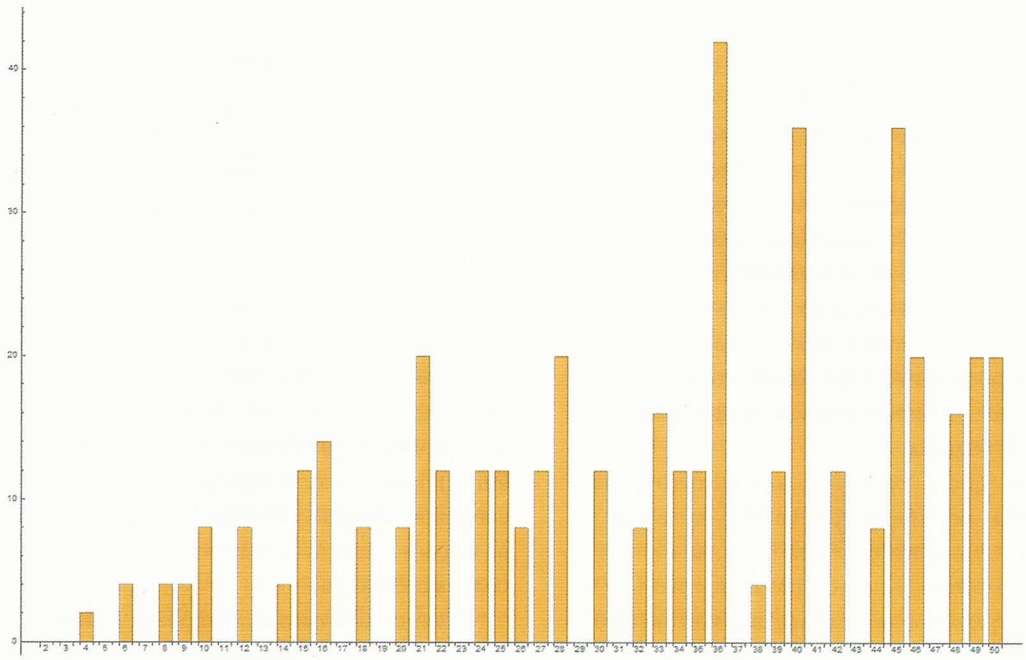

Figura 3. $\mathcal{N}(\beta)$ para as bases $\beta = 2, 3, \ldots, 50$.

trivial na base β. As figuras 4, 5, 6 e 7 indicam todas as frações canceláveis não triviais nas bases $\beta = 9$, 15, 16 e 25. Foram obtidas com o algoritmo anterior e de cada figura constam também os respetivos valores de p, m e ℓ.

A figura 8 representa numa escala logarítmica, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio e a partir do raio horizontal da esquerda, as frações canceláveis não triviais (amarelo), as canceláveis triviais (laranja), as suscetíveis de cancelamento mas não canceláveis, e as não suscetíveis de cancelamento (azul)[1]. Os dados estão indicados para bases de 2 a 50, por ordem crescente do raio.

Terminado o estudo de frações com dois algarismos, podemos explorar as frações com três algarismos de uma base β fixada e suscetíveis de cancelamento. Há agora mais possibilidades a considerar, seja no número de algarismos a cancelar, seja na posição deles no numerador e no denominador da fração. Para simplificar a abordagem e excluir os casos triviais, restringimo-nos a frações $\frac{\cancel{c}yz}{r\cancel{c}t}$, $\frac{\cancel{c}yz}{rs\cancel{c}}$, $\frac{x\cancel{c}z}{rs\cancel{c}}$ e $\frac{x\cancel{c}z}{r\cancel{c}t}$. Da lista de frações não triviais canceláveis nas bases $\beta = 2, 3, \ldots, 12$ que o Atractor construiu (e a que pode aceder em [1]), pudemos conjeturar, e depois provar, algumas propriedades sobre estas frações em qualquer base, de que a lista seguinte é uma amostra.

Há apenas uma fração cancelável não trivial em base $\beta = 2$, nomeadamente $\frac{1\cancel{0}0}{11\cancel{0}}$. Ao contrário do que acontece com frações de dois algarismos (em que, se uma fração não trivial é cancelável numa base, então não o é noutra base), existe uma fração não trivial com três algarismos

[1] Dizemos de uma fração que é suscetível de cancelamento se tiver (pelo menos) um algarismo comum ao numerador e ao denominador.

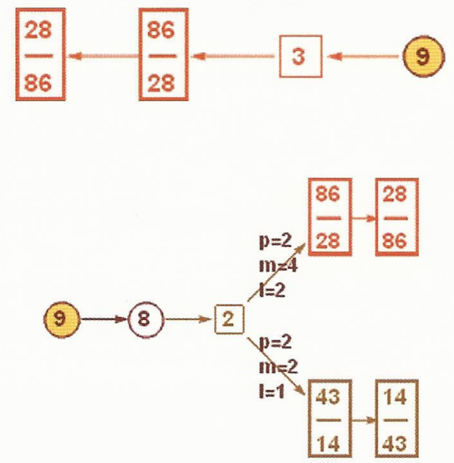

Figura 4. Frações canceláveis não triviais na base 9.

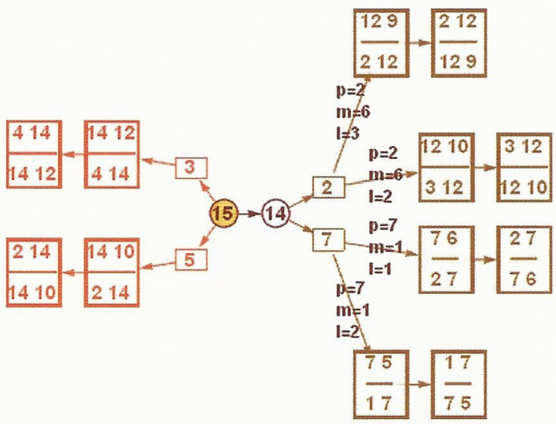

Figura 5. Frações canceláveis não triviais na base 15.

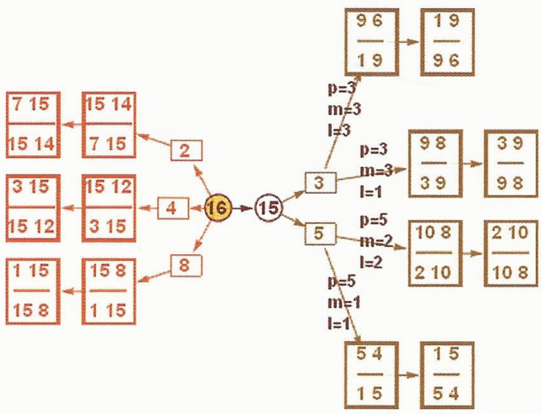

Figura 6. Frações canceláveis não triviais na base 16.

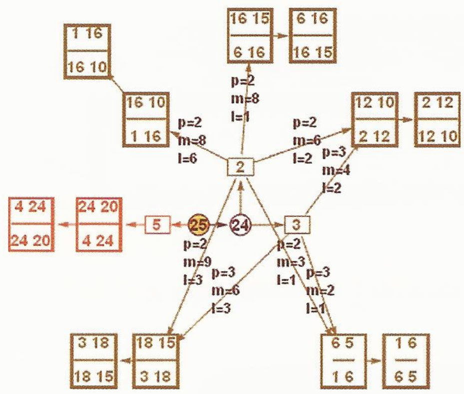

Figura 7.Frações canceláveis não triviais na base 25.

que é cancelável em todas as bases $\beta \geq 3$: $\frac{\cancel{2}20}{1\cancel{2}1}$. Para qualquer base $\beta \geq 4$, são canceláveis as frações $330/132, 330/231$ e

$$\frac{3\ \cancel{\beta-1}\ \beta-2}{1\ \beta-1\ \cancel{\beta-1}};$$

e, se $\beta \geq 4$ é par, é sempre cancelável a fração

$$\frac{\cancel{1}\ 1\ 2}{\frac{\beta}{2}+1\ \cancel{1}\ \frac{\beta}{2}+1}.$$

Para todo o natural ímpar $\beta \geq 5$, a fração

$$\frac{\cancel{2}\ 3\ 0}{1\ \cancel{2}\ \frac{\beta+3}{2}}$$

é cancelável na base β. Para todo o $\beta \geq n$, são canceláveis na base β as frações

$$\frac{\cancel{n-1}\ n-1\ 0}{1\ \cancel{n-1}\ n-2}, \quad \frac{\cancel{n-1}\ n-1\ 0}{2\ \cancel{n-1}\ n-3},$$

$$\frac{\cancel{n-1}\ n-1\ 0}{3\ \cancel{n-1}\ n-4}, \quad \ldots, \quad \frac{\cancel{n-1}\ n-1\ 0}{n-2\ \cancel{n-1}\ 1}.$$

Se β é primo, não existem frações $\frac{\cancel{t}yz}{rs\cancel{t}}$ na base β que sejam não triviais e canceláveis.

O leitor é convidado a explorar todo o material interativo que o Atractor produziu a propósito deste tema e a considerar o desafio de obter uma descrição completa das frações canceláveis não triviais com três algarismos.

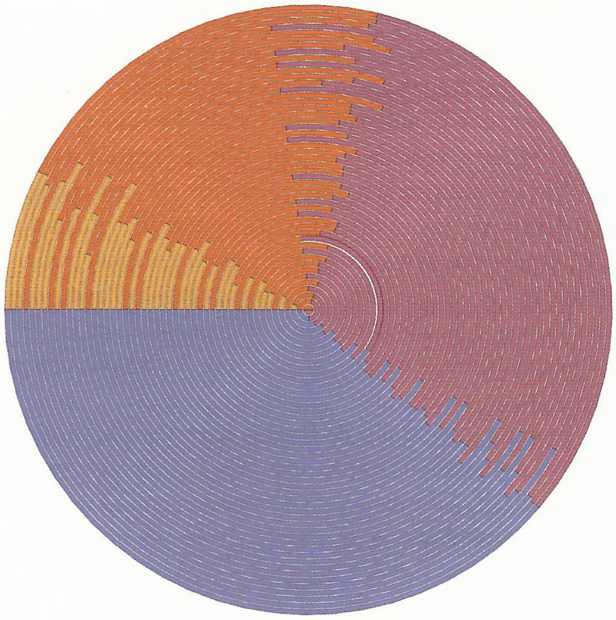

Figura 8. Percentagem de frações canceláveis não triviais.

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/mat/reciclandoerro*