No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

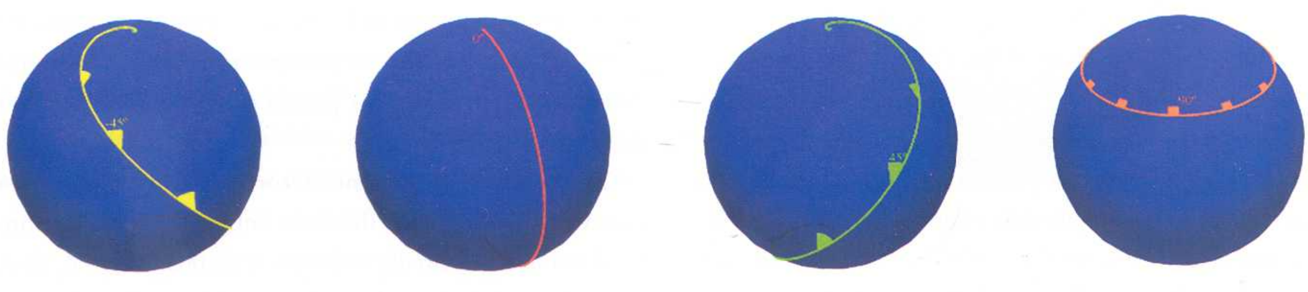
RUMOS **MAGNÉTICOS** – ATRAÇÕES **POLARES**

Imagine o leitor que está em alto mar, numa viagem marítima de Portugal ao Brasil, sendo responsável pelo rumo da embarcação. Que rota deverá tomar e como zelar para a seguir?

A resposta a esta questão depende dos meios e instrumentos de navegação disponíveis, e pode mesmo argumentar-se que a melhor rota a tomar é a que com maior facilidade e precisão puder ser seguida. Desde o século XV, pelo menos, que se sabe que, recorrendo a uma bússola, é possível seguir um rumo fazendo um ângulo constante com os meridianos de longitude.[1] Este método de navegação segundo um rumo de ângulo constante com a agulha da bússola está ainda na base da navegação atual [7]. Em [1] o leitor poderá experimentar alguns rumos de ângulo constante entre dois pontos à escolha na superfície esférica e tentar encontrar um ângulo que permita ir de um ponto ao outro por um rumo deste tipo.

Como é que são as rotas de ângulo constante se supusermos que a Terra é esférica? Uma rota de ângulo constante α (ângulo orientado, sendo 90° o sentido Este e -90° o sentido Oeste) com os meridianos de longitude (que são semicírculos máximos com extremidades nos polos) é uma curva esférica que pode ser prolongada a uma curva satisfazendo ainda a propriedade de fazer um ângulo constante com os meridianos e tal que: (i) o prolongamento é um paralelo de latitude (isto é, um círculo esférico com centro no(s) polo(s)), no caso de α ser reto; (ii) caso contrário, o prolongamento tem como extremidades os polos, embora não possamos considerar que os polos pertencem à curva uma vez que, nestes pontos, não está definido o ângulo com os meridianos.

[1] Esta afirmação é, todavia, imprecisa, já que uma bússola aponta para o polo magnético e não para o polo geográfico; este problema será retomado no final do artigo.



▲ Figura 1: Loxodrómicas de ângulos -45°, 0°, 45° e 90°, respetivamente.

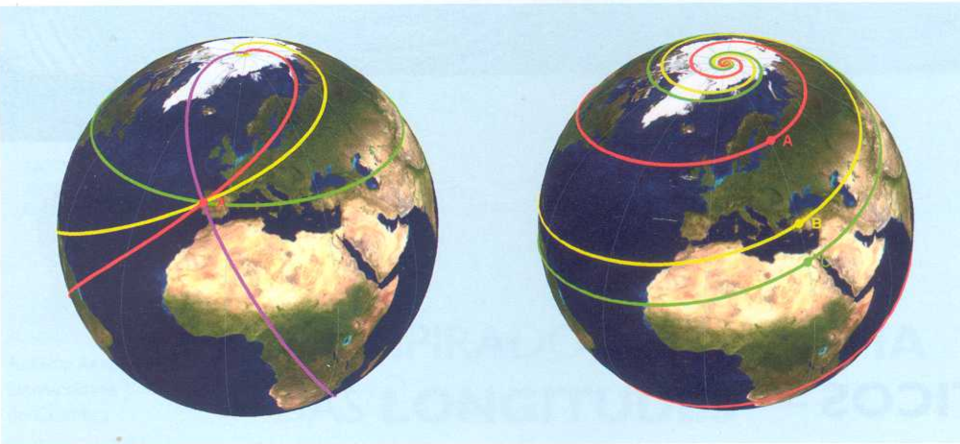


Figura 2: **À esquerda:** Loxodrómicas passando em *A* de ângulos 45°, 60°, 90° e -30°. **À direita:** e de ângulo 75°, passando em *A*, *B* e *C*.

Uma curva com estas características diz-se *curva de rumo* ou *loxodrómica*, de que a figura 1 mostra alguns exemplos. Estas curvas foram estudadas pela primeira vez no *Tratado sobre Certas Dúvidas da Navegação*, de 1537, da autoria do matemático português Pedro Nunes (1502-1578). Em [2], o leitor poderá construir loxodrómicas para várias escolhas do ângulo e passando por um ponto previamente fixado; em [3], poderá gerar loxodrómicas com um ângulo fixado mas passando por pontos distintos (figura 2).

Voltando à interrogação inicial, podemos agora afirmar que nos basta determinar o ângulo que a rota deverá fazer com os meridianos entre os pontos de partida e de chegada e, com o auxílio de uma bússola, manobrar o leme de forma a manter esse ângulo constante durante o percurso. Colocam-se, porém, outras perguntas:

Q1. Como determinar um ângulo nas condições requeridas?

Q2. Haverá um único ângulo possível?

Q3. Uma loxodrómica é a curva de menor comprimento na esfera entre dois dos seus pontos?

Comecemos pela primeira questão e por observar que, se um dos pontos for um polo, então existe um meridiano (que é uma loxodrómica de ângulo zero) que contém os dois pontos. Caso contrário, se nenhum dos dois pontos for um polo, para determinar uma loxodrómica passando por ambos basta conceber uma projeção conforme (isto é, uma função que preserva ângulos) da esfera (exceto os polos) no plano que envie loxodrómicas em retas. De facto, com um tal mapa, para encontrar uma loxodrómica passando pelos dois pontos, marcamos os dois pontos no mapa, traçamos o segmento de reta que os une e tomamos o ângulo que este segmento faz com os meridianos. Um tal mapa existe desde 1569, tendo sido construído pelo cartógrafo flamengo Gerard Mercator (1512-1594).[2]

No *mapa de Mercator*, os meridianos são projetados em retas paralelas verticais de espaçamento uniforme, enquanto os paralelos são enviados em retas horizontais, perpendiculares às primeiras e de espaçamento crescente do equador para os polos. Desse modo, compensa-se a distorção da projeção cilíndrica de Arquimedes, que preserva áreas mas não ângulos. Em [10] pode ler-se a primeira construção matemática rigorosa da *projeção de Mercator* e também um método heurístico para visualizar esta aplicação: imagine uma esfera como um balão, e este inscrito num cilindro que lhe é tangente no equador; ao encher-se de ar, o balão expande e os pontos da sua superfície vão aderindo às paredes do cilindro; este cilindro é depois cortado ao longo de um meridiano, e assim se obtém o mapa (figura 3). Em [4], o leitor poderá escolher um ponto da esfera, seguir a construção descrita acima e inferir que a imagem da projeção de Mercator é uma banda de largura finita mas com altura ilimitada inferior e superiormente. Por isso, na prática, num mapa de Mercator estão apenas projetados os pontos da esfera com latitudes entre $-L^{\circ}$ e L°, onde $L < 90^{\circ}$.

Quanto à terceira pergunta, recordemos que numa esfera a curva que minimiza a distância entre dois pontos distintos é um arco de círculo máximo. A resposta a Q3 é, pois, positiva se a loxodrómica for um meridiano (loxodrómica

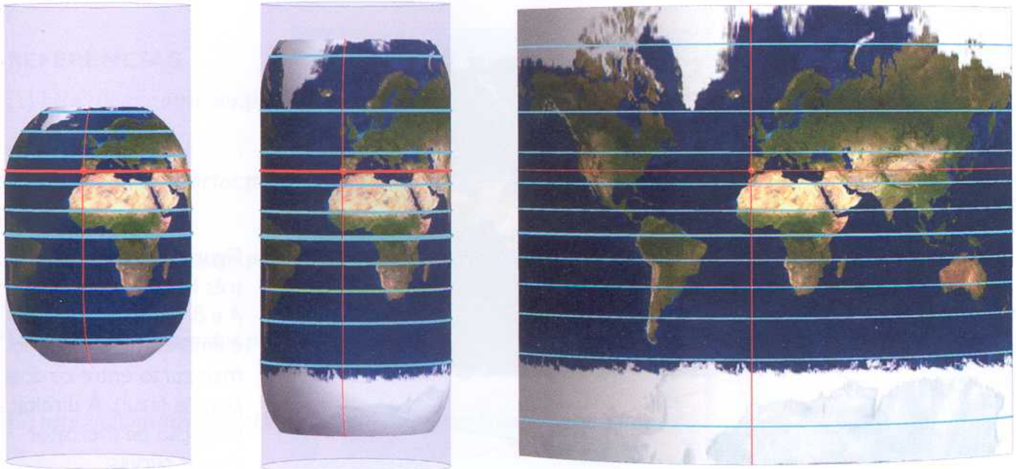


Figura 3: Construção do mapa de Mercator.

de ângulo 0°) ou o círculo do equador. Nos restantes casos a loxodrómica não contém nenhum arco de círculo máximo e, portanto, não minimiza a distância entre os seus pontos (figura 4).

A resposta à segunda pergunta é negativa se existirem duas loxodrómicas intersetando-se em dois pontos distintos. Pode mostrar-se [1] que, salvo os casos em que a loxodrómica é um meridiano ($\alpha = 0\,°$) ou um paralelo ($\alpha = \pm 90\,°$), a curva é uma espiral em torno dos polos (embora tenha comprimento finito) e, portanto, interseta cada meridiano uma infinidade de vezes (figura 5). Assim, fixado um meridiano e dois dos seus pontos comuns à loxodrómica em espiral, obtemos um exemplo em que há dois ângulos distintos que servem para determinar a rota.

Podemos acrescentar que, dados dois pontos a latitudes distintas (e que não sejam os polos), há uma infinidade de loxodrómicas que passam nesses pontos. Para melhor entender esta afirmação, note-se primeiro que os pontos nas extremidades Oeste e Este do mapa de Mercator e à mesma latitude correspondem ao mesmo ponto do cilindro, e portanto ao mesmo ponto da esfera. Assim, uma loxodrómica de ângulo $\alpha \neq 0\,°, \pm 90\,°$ é projetada numa curva em forma de hélice no cilindro; quando este se corta para construir o mapa de Mercator, a curva é enviada num sistema de segmentos de reta paralelos e equidistantes, entre uma extremidade do mapa e a outra. Reciprocamente, se agora

[2] Sugere-se a consulta de [9, 8] e das referências indicadas nestes artigos para saber mais sobre a possível influência do trabalho de Pedro Nunes na conceção deste mapa.

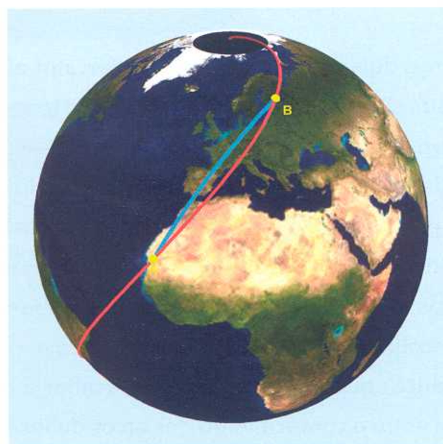


Figura 4: A vermelho é apresentada uma loxodrómica, cujo traço tem a forma de espiral. A azul assinala-se o caminho mais curto na esfera entre dois pontos da loxodrómica.

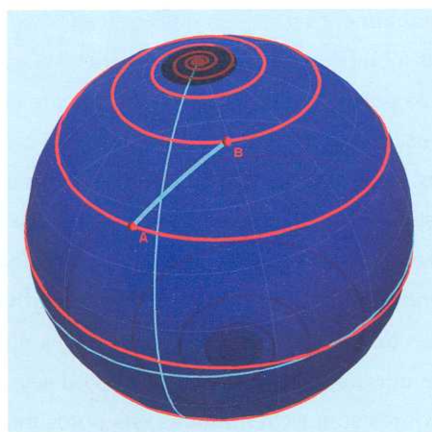


Figura 5: Loxodrómica com $\alpha = -84\,°$ a vermelho e meridiano a azul.

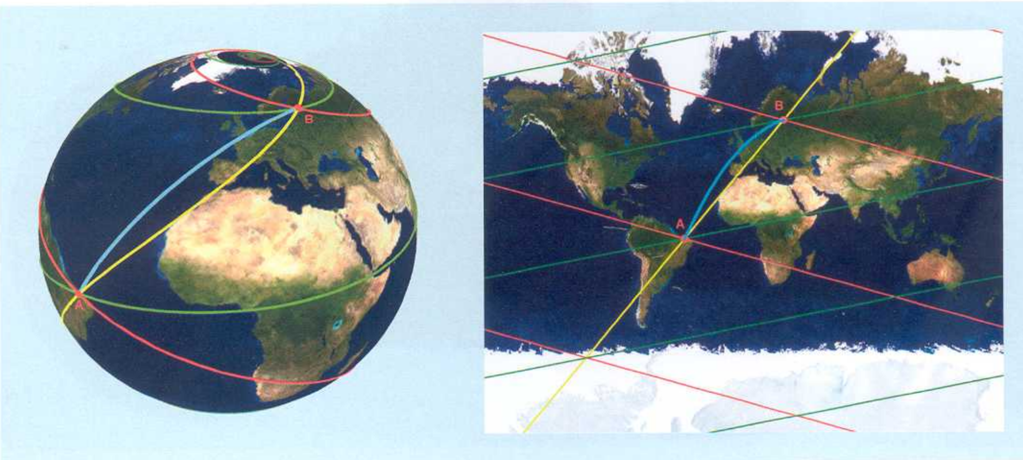


Figura 6: **À esquerda:** três loxodrómicas entre *A* e *B* (vermelho, verde e amarelo) e o caminho mais curto entre os dois pontos (azul). **À direita:** projeção de Mercator dessas curvas.

considerarmos dois pontos no mapa de Mercator a latitudes distintas, cada sistema de segmentos paralelos (não horizontais nem verticais) nas condições descritas acima e contendo os pontos dados, corresponde na esfera a uma loxodrómica entre os pontos. Como há uma infinidade de sistemas de segmentos de reta nestas condições, há uma infinidade de loxodrómicas que contêm os pontos dados (figura 6). Em [5], pode escolher dois pontos na esfera, variar o número de loxodrómicas que passam por eles e avaliar a diferença aproximada entre o comprimento dos arcos de loxodrómica que unem os pontos e o correspondente comprimento do arco de círculo máximo que realiza a distância entre eles na esfera. A figura 6 ilustra um tal exemplo.

Para terminar, voltemos à questão da natureza da bússola. Existem atualmente bússolas que indicam os polos geográficos, mas a bússola mais comum é a bússola magnética, que aponta os polos magnéticos. Era certamente este o tipo de bússola usado na navegação do século XV e dos séculos seguintes. Ora, os dois tipos de polos são distintos. Assim, se o instrumento de navegação a usar for uma bússola (magnética) e quisermos seguir um rumo entre dois pontos fixados fazendo um ângulo constante com a agulha da bússola, as linhas de referência a tomar não são os meridianos de longitude mas os *meridianos magnéticos*, ou seja, os semicírculos máximos com extremidades nos polos magnéticos, que supomos serem antípodas (figura 7). Denominaremos a curva análoga à loxodrómica mas com a propriedade de fazer um ângulo constante com os meridianos magnéticos por *loxodrómica magnética*. Sendo esta a curva que interessa à navegação por bússola, o ângulo que devemos conhecer é aquele entre uma loxodrómica magnética que passe pelos pontos a considerar e os meridianos magnéticos. Este ângulo pode ser obtido por uma *projeção de Mercator magnética* na qual a esfera é tangente ao cilindro envolvente no *equador magnético*, que é a interseção da esfera com o plano que passa no seu centro e é perpendicular ao eixo definido pelos polos magnéticos. Em [6] é possível variar a localização dos polos magnéticos e comparar loxodrómicas com loxodrómicas magnéticas.

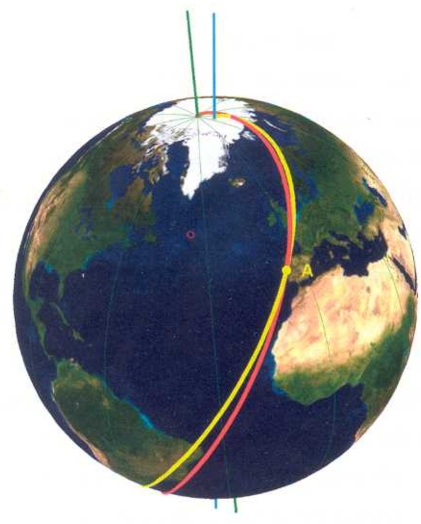


Figura 7: Curvas loxodrómica (amarelo) e loxodrómica magnética (vermelho); eixo e meridianos magnéticos (verde) e eixo geográfico (azul).

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/*

[2] *http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/1ponto_curvas*

[3] *http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/1angulo_curvas*

[4] *http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/mercator_definicao*

[5] *http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/mercator_loxodromica*

[6] *http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/loxodromica_magnetica*

[7] B. Kreutz, "Mediterranean Contributions to the Medieval Mariner's Compass", *Technology and Culture*, 14, N. 3, (1973), 367--383.

[8] J.F. Queiró, "Proposta Cartográfica de Pedro Nunes em 1566", Suplemento do *Boletim da SPM* 65 (2011), 23--25.

[9] W.G.L. Randles, "Pedro Nunes e a Descoberta da Curva Loxodrómica", *Gazeta de Matemática* 143 (2002), 90--97.

[10] E. Wright, *Certaine Errors in Navigation*, Valentine Sims, London, 1599.