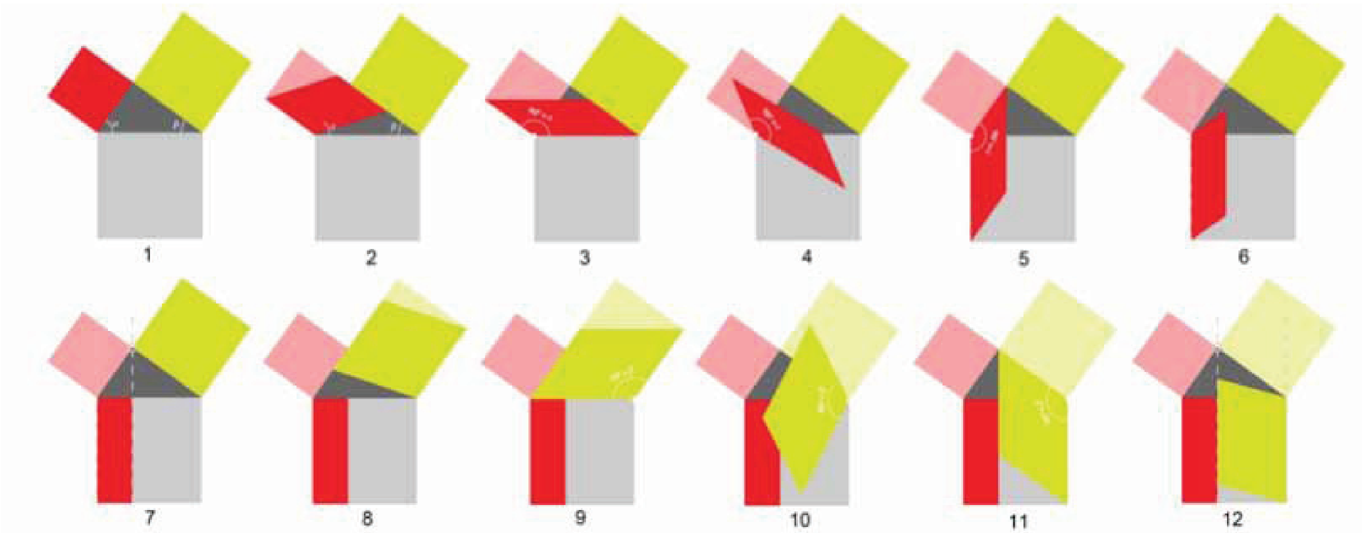
ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

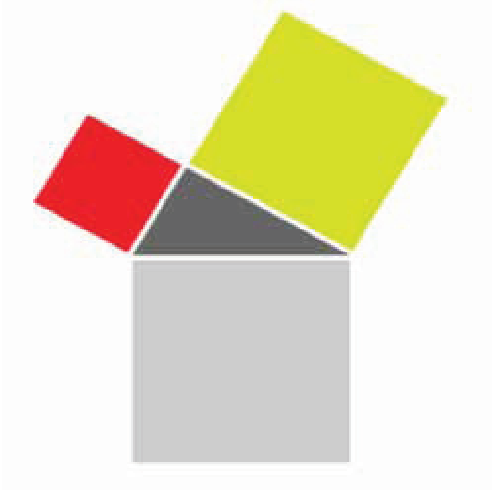
ÁREAS E VOLUMES 2

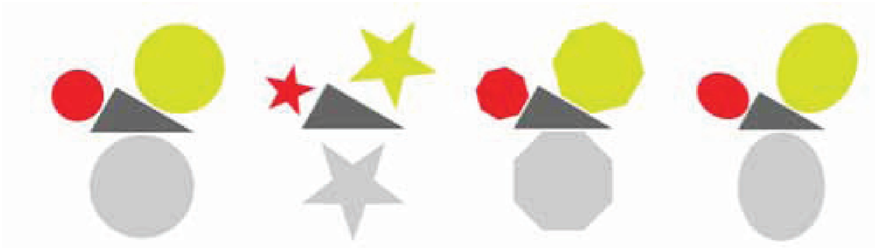
Partindo de uma formulação geométrica alternativa do Teorema de Pitágoras, é indicada uma construção que a cada coroa circular associa um disco com a mesma área. E, repetindo esse procedimento com as coroas circulares que se obtêm seccionando uma esfera e um cilindro circunscrito por uma família de planos perpendiculares ao eixo deste, determinaremos o volume da esfera.



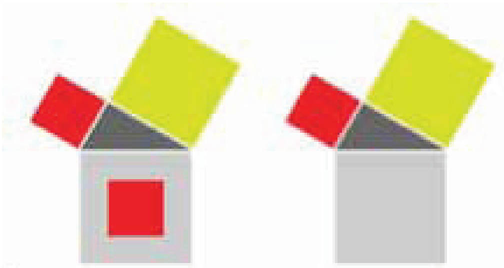
Consideremos um triângulo rectângulo e três quadrados construídos sobre os seus três lados. Na sucessão de imagens acima - de que a imagem final é a indicada à esquerda, separada das outras - as partes a vermelho têm igual área e o mesmo vale para as coloridas a amarelo. De facto, para a figura vermelha: em 1, 2, 3 e 5, 6, 7, porque a área de um paralelogramo só depende do comprimento de um lado e da altura correspondente [1], e em 3, 4, 5, porque uma rotação conserva distâncias e, portanto, também áreas. Analogamente para a figura amarela: passos 7, 8, 9 e 11, 12, final pela primeira razão e 9, 10, 11 pela segunda. Conclusão: a área do quadrado cinzento construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados coloridos construídos sobre os catetos (formulação geométrica do Teorema de Pitágoras).

Como figuras semelhantes com razão de semelhança k têm áreas que estão na razão k^2 [1], podemos concluir que, para quaisquer outras figuras (semelhantes entre si), construídas (de igual forma) sobre os catetos e a hipotenusa, continua a ser verdade que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das construídas sobre os catetos. Em cada imagem a figura cinzenta tem como área a soma das áreas das figuras vermelha e amarela.

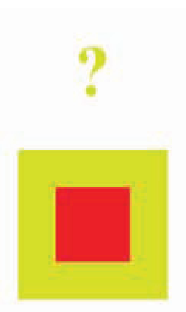




A figura abaixo sugere uma formulação geométrica alternativa para o teorema de Pitágoras. Colocando uma cópia do quadrado vermelho no quadrado cinzento, obtém-se uma coroa quadrada, cuja área é exactamente a do quadrado amarelo associado ao outro cateto.

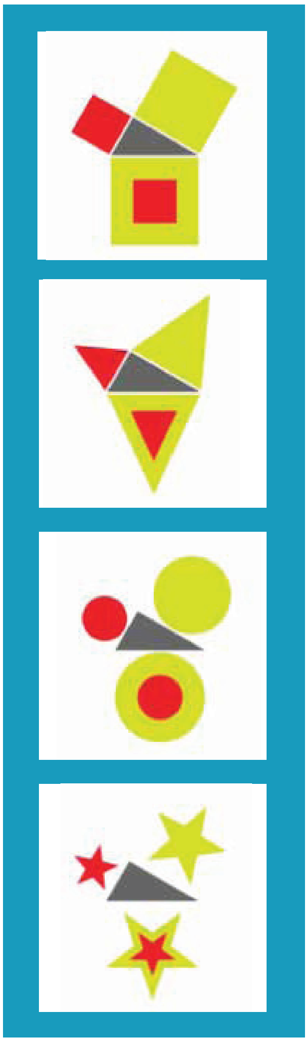


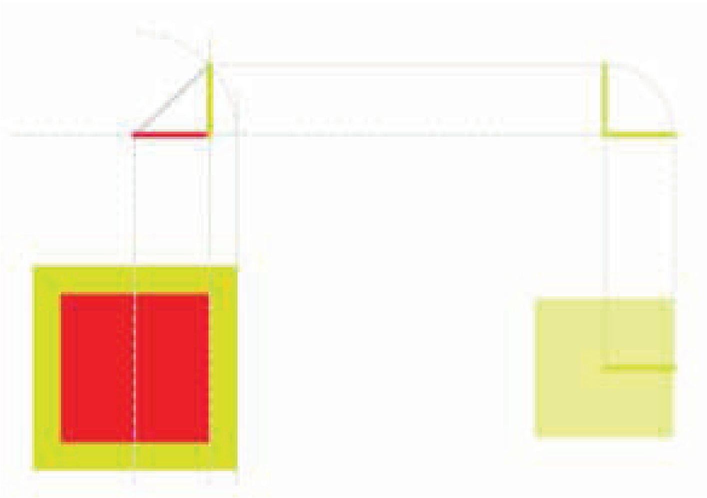
À esquerda, a coroa a cinzento e o quadrado amarelo têm mesma área



Para cada imagem, têm área igual as figuras com a mesma cor (ver à direita).

Utilizando devidamente estas propriedades, poderemos encontrar facilmente uma solução para o problema de, dada uma "coroa" baseada numa figura de certa forma, encontrarmos uma figura com a mesma forma (i.e. semelhante) com a mesma área. Por exemplo, como construir um quadrado com área igual à da coroa quadrada amarela na figura ao lado? No caso geral, basta escolher na figura maior dois pontos, construir um triângulo rectângulo que tenha como medida da hipotenusa a distância entre esses dois pontos da figura e como medida de um dos catetos a distância entre os pontos correspondentes da figura semelhante

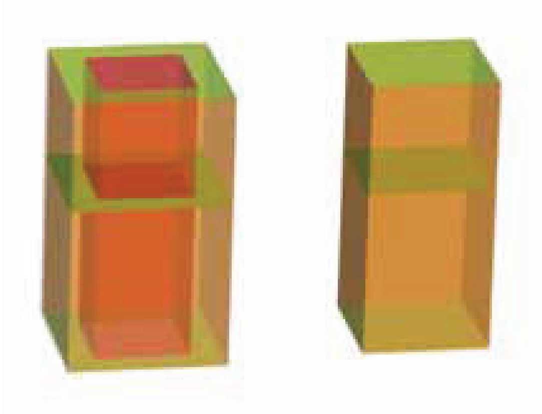




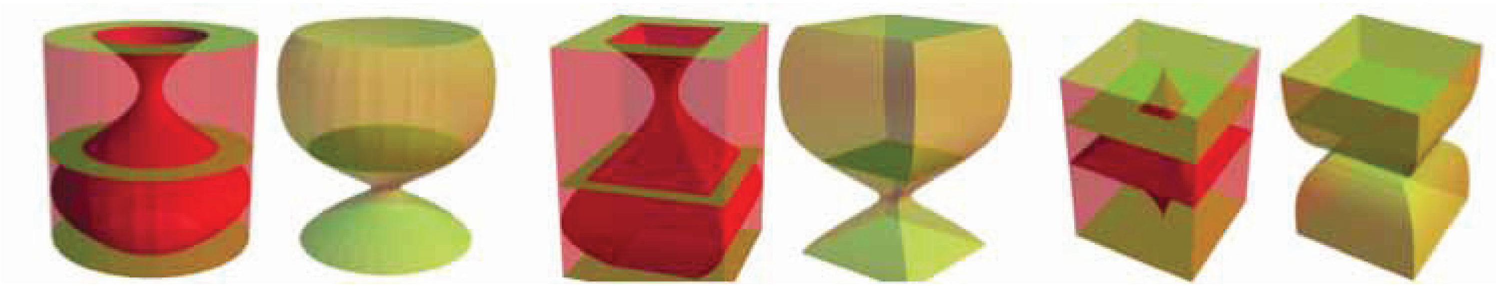
mais pequena, na coroa. Construindo a figura semelhante em que os dois pontos correspondentes aos anteriores distam entre si exactamente o comprimento do novo cateto do triângulo, temos o problema resolvido (figura acima).

Para construir o tal triângulo rectângulo, um processo simples é o de desenhar uma circunferência cujo raio seja a hipotenusa desejada, marcar num raio um segmento com origem no centro e comprimento igual ao do cateto desejado e tirar uma perpendicular pelo outro extremo. Por exemplo, partindo da coroa quadrada amarela anterior, a construção geométrica indicada na figura acima leva a um quadrado com a mesma área da coroa. O arco de circunferência indicado tem como raio a medida de meio lado do quadrado grande da coroa e o segmento vermelho horizontal com um extremo no centro da circunferência tem comprimento igual ao de metade do lado do quadrado vermelho. A recta perpendicular a este segmento passando pelo seu outro extremo determina no arco de circunferência um ponto. O segmento (amarelo) vertical desta recta com extremo nesse ponto é o cateto desejado. O quadrado procurado tem como comprimento do lado o dobro do deste cateto.

Para prismas rectos assentes sobre estas figuras planas, temos resultados análogos, agora envolvendo os respectivos volumes. Por exemplo, na figura abaixo, partindo da coroa prismática da esquerda e aplicando a construção anterior à secção recta (horizontal), que é uma coroa quadrada, obtemos um prisma de secção quadrada com o mesmo volume da "coroa prismática" da esquerda.

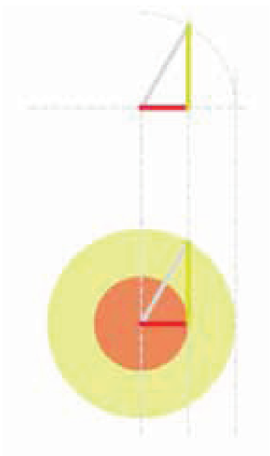


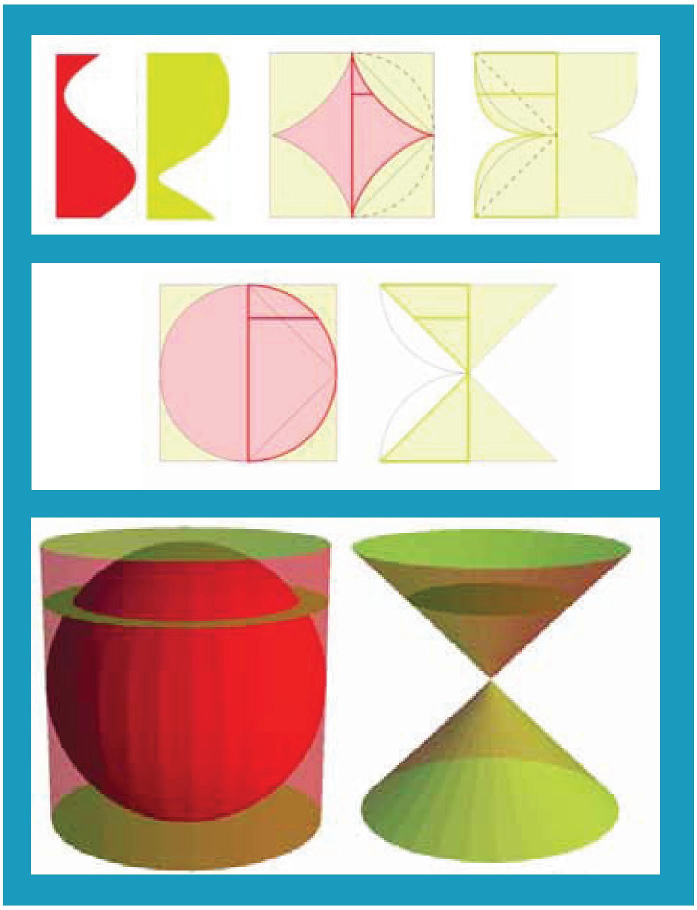
Mas estamos particularmente interessados numa situação mais complexa, em que a parte exterior é um prisma (ou cilindro) e a interior tem secções variáveis com a altura. Se, em cada nível, aplicarmos a construção anterior, obtemos do lado esquerdo coroas em que as figuras de fora são todas congruentes, mas não as de dentro. O resultado é o que as figuras abaixo ilustram. Para cada par, o volume da região (imagem da esquerda) compreendida entre o prisma ou cilindro exterior e o sólido que está dentro é igual ao volume do sólido (verde). Isto resulta do facto de as secções por cada plano ho-



rizontal terem a mesma área. O tamanho dessas secções depende da altura segundo uma função que, neste exemplo, é a mesma para os dois primeiros pares e diferente para o último (ver figura).
Se a curva determinando a variação do tamanho das secções do sólido vermelho for uma circunferência, obtemos um caso particularmente interessante; note-se na figura à direita (meio), a curva correspondente amarela. Se as formas usadas forem circulares, o sólido vermelho da esquerda dentro do cilindro é uma esfera e o sólido verde da direita um (duplo) cone.

Qual a razão? Se voltarmos ao processo anterior de construção, descobrimos que neste caso a altura da secção é igual ao comprimento do cateto construído, que, por sua vez, vai ser o raio da secção da figura verde da direita. Isto é, o raio desta secção é precisamente igual à altura da secção. Portanto, obtemos geratrizes rectilíneas de um duplo cone de revolução com uma inclinação de 45° relativamente ao eixo. Aliás, no caso em análise, há uma construção equivalente e mais directa do cateto desejado (que será o raio do círculo com área igual à da coroa circular de partida). Como a figura à esquerda indica, nesse caso particular do círculo, basta marcar um raio horizontal do círculo vermelho: o segmento amarelo vertical partindo do extremo desse raio e terminando na circunferência amarela é o cateto procurado. O triângulo rectângulo assim obtido é claramente congruente com o que se obtém pela construção geral, válida para todas as formas. Como o volume do duplo cone é um terço do volume do cilindro com a mesma base e altura (o da esquerda) [1], o volume da esfera será a diferença entre os dois, ou seja, dois terços do volume desse cilindro.





Em [1] foram dadas justificações das afirmações: i) a área de um paralelogramo só depende do comprimento da base; ii) o volume de um prisma (cilindro) ou de uma pirâmide (um cone) só depende da altura e da área da base (não da forma desta); iii) uma pirâmide (um cone) tem como volume um terço do volume do prisma (cilindro) com a mesma base e altura. E decorre de propriedades justificadas nesse texto que a área de um triângulo só depende do comprimento da base e da altura, pelo que é metade da do paralelogramo construído sobre dois dos seus lados. Fixando como unidade de volume o valor do volume de um cubo de aresta unitária e utilizando devidamente grelhas tridimensionais cada vez mais finas, obtidas a partir daquele cubo, conclui-se que qualquer prisma rectangular recto tem como volume o produto dos comprimentos de três arestas, duas na base e uma vertical. Por outro lado, π é definido como a razão (que se prova ser constante) entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, ou seja o perímetro é, por definição de π, igual a $2\,\pi\, r$, sendo r o raio da circunferência. Inscrevendo um polígono regular de n lados na circunferência e unindo os vértices ao centro, obtêm-se n triângulos, cuja área total é metade do produto do perímetro pelo apótema. Daqui conclui-se que a área do círculo é metade do produto do raio pelo perímetro, ou seja $\pi\, r^2$. Assim, o volume do cilindro de revolução envolvente da esfera é $\pi\, r^2 * 2\, r$ e o da esfera é dois terços do volume do cilindro, ou seja, $(2/3)\, \pi\, r^2\, .(2r)=(4/3)\, \pi\, r^3$.

REFERÊNCIAS

[1] Atractor, "Áreas e Volumes", *Gazeta de Matemática* 164, ano 72, Jul 2011, pp. 4-7