Segunda diagonal mais curta

Depois de verificarmos a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal mais curta de um polígono regular com 4 ou mais lados, podemos agora tentar averiguar o que acontece com outras diagonais. Nomeadamente, será que a segunda diagonal mais curta de um polígono regular de n lados, com $n \geqslant 6$ e o seu lado também são incomensuráveis? Neste caso, a sua razão é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} &= 4\cos^2\frac{\pi}{n} - 1 = 4\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi}{n}}{2}\right) - 1 = \\ &= 1 + 2\cos\frac{2\pi}{n} = 1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{-\frac{2\pi i}{n}} = t + 1 + t^{-1}\end{aligned}$$

onde $t = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Supondo que esta razão é um número racional λ, temos:

$$t + 1 + t^{-1} = \lambda \Longleftrightarrow t^2 + t + 1 = \lambda t \Longleftrightarrow t^2 + (1-\lambda)t + 1 = 0 \Longleftrightarrow f(t) = 0$$

onde $f(x) = x^2 + (1-\lambda)x + 1$ é um polinómio mónico de coeficientes racionais do qual t é raiz e de grau 2. Mas, já vimos que o menor grau possível para um polinómio nessas condições era $\phi(n)$. Logo, temos necessariamente que $\phi(n) \leqslant 2$, ou seja, $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Portanto, apenas no caso do hexágono regular ($n = 6$) estas duas grandezas são comensuráveis, sendo incomensuráveis para todos os outros polígonos regulares com mais de 6 lados. Em que casos poderemos demonstrar esta incomensurabilidade por um processo geométrico análogo ao utilizado no caso da diagonal mais curta? Do mesmo modo que no caso da diagonal mais curta, a razão $\lambda = t + 1 + t^{-1}$ terá de ser raiz de um polinómio de grau 2 de coeficientes inteiros. Supondo que tal acontece, temos:

$$\begin{aligned}&a(t + 1 + t^{-1})^2 + b(t + 1 + t^{-1}) + c = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\ &a(t^2 + 2t + 3 + 2t^{-1} + t^{-2}) + b(t + 1 + t^{-1}) + c = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\ &a(t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1) + b(t^3 + t^2 + t) + ct^2 = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\ &at^4 + (2a+b)t^3 + (3a+b+c)t^2 + (2a+b)t + a = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\ &g(t) = 0\end{aligned}$$

onde $g(x) = ax^4 + (2a+b)x^3 + (3a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$ é um polinómio de grau 4 de coeficientes racionais do qual t é raiz. Mas, já vimos que o menor grau possível para um polinómio nessas condições era $\phi(n)$. Logo, temos necessariamente que $\phi(n) \leqslant 4$, ou seja, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$. Portanto, apenas para o octógono, decágono e dodecágono regulares ($n = 8$, 10 e 12, respectivamente) é possível demonstrar esta incomensurabilidade por um processo geométrico análogo ao utilizado no caso da diagonal mais curta.