

## BILHARES DE INTEIROS

*António Saraiva*<sup>1</sup>

Centro de Matemática do Porto

**Resumo:** Os bilhares que aqui consideraremos têm uma base rectangular de lados  $n$  e  $m$ , para valores inteiros positivos  $n$  e  $m$  arbitrários, e quatro paredes laterais que são ajustáveis de modo a construir um paralelepípedo sem tampa. Uma bola entra por um dos vértices, paralelamente à base do paralelepípedo e fazendo um ângulo  $\theta$  com um dos lados adjacentes a esse vértice. Uma vez dentro da mesa do bilhar, a bola move-se sem atrito e, quando choca com alguma das paredes, é reflectida com ângulo igual ao de incidência, a menos que saia por um canto.

Como provaremos, a dinâmica neste tipo de bilhares depende da relação entre os naturais  $n$  e  $m$  e do ângulo  $\theta$ . No caso, mais simples, de  $\theta$  ser igual a  $45^\circ$ , a trajectória termina sempre num dos cantos, calculando pelo caminho o máximo divisor comum e o menor múltiplo comum de  $n$  e  $m$ . Quando  $tg(\theta)$  é racional, a dinâmica repete este padrão; pelo contrário, se  $tg(\theta)$  é irracional, a bola não sai do bilhar, traçando uma órbita densa no rectângulo de lados  $n$  e  $m$ .

**Palavras-chave:** bilhar, congruência, grupo

**Abstract:** The billiards we will analyse consists of a rectangular table surrounded by adjustable walls so that the lengths of its sides are variable positive integers  $n$  and  $m$ . The ball starts from one of the vertices at an angle  $\theta$  with one of the adjacent sides, and moves without friction while inside the billiard. When it reaches a corner, it leaves the table; if it collides with a wall, it bounces back at an angle equal to the angle of incidence.

A few examples lead us to suspect that the dynamics of this type of billiards depends strongly on the relation between the numbers  $n$ ,  $m$  and  $\theta$ . We will prove that, in the simpler case  $\theta = 45^\circ$ , the orbit always ends at a corner after a finite number of collisions with the walls; furthermore, the exit corner can be computed in advance knowing  $n$  and  $m$ . Also, both the greatest common divisor and the least common multiple of  $n$  and  $m$  can be read from the orbit. For rational  $tg(\theta)$ , the dynamics follows this same general pattern. However, if  $tg(\theta)$  is irrational, then the ball never leaves the billiards, tracing a dense orbit on the table.

---

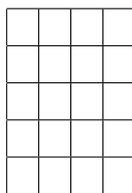
<sup>1</sup>Trabalho realizado com a orientação de Maria Carvalho no âmbito de uma bolsa da FCT de iniciação à investigação.

**Keywords:** billiards, congruence, group

## 1 Introdução

No que se segue,  $n$  e  $m$  designam dois naturais, com  $m \geq n$ , que representam os lados da mesa rectangular  $\mathcal{M}$  do bilhar. Denotaremos por  $m.d.c(n, m)$  o máximo divisor comum de  $n$  e  $m$ , por  $m.m.c(n, m)$  o menor múltiplo comum de  $n$  e  $m$  e por  $\mathcal{L}$  a função comprimento de curvas.

Introduza-se um sistema de coordenadas na mesa do bilhar, como o da figura, onde está assinalada a rede inteira

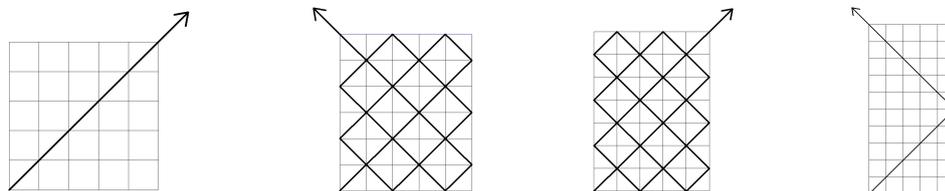


e em que os cantos da mesa se representam pelos pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (n, 0)$ ,  $C = (n, m)$  e  $D = (0, m)$ . A família de rectas

$$\mathcal{F} = \{(kn, y) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, km) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$$

subdivide o plano numa rede  $\mathcal{R}$  de rectângulos de lados  $n$  e  $m$ , um dos quais é precisamente o bilhar  $\mathcal{M}$ .

Comecemos por analisar a dinâmica nestes bilhares de uma bola que entra com ângulo  $\theta=45^\circ$ . Nos exemplos seguintes estão traçados os percursos da bola depois de entrar pelo canto inferior esquerdo.



Note-se que, se a órbita da bola passa por algum canto do bilhar que não o de entrada, então sai por esse canto. Como provaremos, para um bilhar deste tipo o movimento da bola depende essencialmente da relação de primalidade entre os lados do rectângulo que forma a base do bilhar.

**Teorema 1** *Sejam  $m$  e  $n$  números naturais e consideremos um bilhar rectangular de dimensões  $n$  e  $m$ . Então:*

1. A trajectória da bola termina num dos cantos do bilhar.
2. O canto por onde a bola sai pode ser determinado previamente a partir dos valores de  $n$  e  $m$ .
3. A trajectória total da bola dentro do bilhar tem comprimento igual a  $\sqrt{2} \times m.m.c(n, m)$ .
4. A trajectória da bola tem  $\frac{n+m}{m.d.c.(n, m)} - 2$  colisões com as paredes do bilhar antes de sair por um dos cantos (não se consideram colisões a entrada e a saída da bola.)
5. O bilhar determina o máximo divisor comum entre  $n$  e  $m$ .

A este teorema se dedicará a secção 2. Aproveitaremos o carácter geométrico elementar das órbitas nestes bilhares, a que se acrescentará uma abordagem algébrica que permitirá transcrever as propriedades dinâmicas em termos de certos grupos cíclicos.

A hipótese de que a bola entra no bilhar fazendo um ângulo de  $45^\circ$  pode ser retirada, mas nesse caso a trajectória também se altera significativamente. Consideremos valores de  $\theta$  no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . É claro que, quando  $\theta = 0$ , a bola sai pelo canto inferior direito; e, dualmente, quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , a bola sai pelo canto superior esquerdo. Em geral, como veremos, se  $tg(\theta) \in \mathbb{Q}^+$ , a bola passa por outro canto que não o de entrada, saindo por ele; se  $tg(\theta) \notin \mathbb{Q}^+$ , a trajectória, depois de entrar, não passa por nenhum ponto da rede inteira, e portanto, em particular, não cruza nenhum canto nem sai do bilhar.

**Proposição 1** *Sejam  $m$  e  $n$  naturais e  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . A trajectória de uma bola que entre no bilhar rectangular de dimensões  $n$  e  $m$  com ângulo  $\theta$  termina num dos cantos do bilhar se e só se  $tg(\theta) \in \mathbb{Q}^+$ .*

Note-se que, se  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  e  $\theta = r\pi$  para algum racional  $r$ , então  $tg(\theta) \in \mathbb{Q}^+$  se e só se  $r = \frac{1}{4}$ , isto é,  $\theta = 45^\circ$  ([2], página 41).

Quando  $tg(\theta) \in \mathbb{Q}^+$  é válida a seguinte versão do Teorema 1:

**Teorema 2** *Sejam  $m$  e  $n$  naturais e  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tais que  $tg(\theta) = \frac{a}{b}$ , onde  $a$  e  $b$  são naturais primos entre si. Num bilhar rectangular de lados  $n$  e  $m$ , onde a bola entre com ângulo  $\theta$ , temos:*

1. O canto por onde a bola sai pode ser determinado previamente a partir dos valores de  $n$ ,  $m$ ,  $a$  e  $b$ .

2. A trajectória total da bola dentro do bilhar tem comprimento igual a  $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \times m.m.c.(an, bm)$ .
3. A trajectória da bola tem  $\frac{an+bm}{m.d.c.(an, bm)} - 2$  colisões com as paredes do bilhar antes de sair por um dos cantos (não se consideram colisões a entrada e a saída da bola).
4. O bilhar determina o máximo divisor comum entre  $an$  e  $bm$ .

O caso em que  $tg(\theta) \notin \mathbb{Q}^+$  traz algumas novidades relativamente ao cenário anterior. Nomeadamente:

**Teorema 3** *Num bilhar rectangular de lados  $n$  e  $m$ , onde a bola entre com ângulo  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tal que  $tg(\theta) \notin \mathbb{Q}^+$ , a trajectória da bola é densa no bilhar.*

Este é o movimento típico de uma bola atirada ao acaso para a mesa do bilhar: a probabilidade da primeira colisão com as paredes do bilhar acontecer num ponto a distância racional de um dos cantos  $B$ ,  $C$  ou  $D$  é nula e por isso a trajectória de uma bola aleatória não sai do bilhar.

## 2 Prova do Teorema 1: $\theta = \frac{\pi}{4}$

Como a bola entra no bilhar fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com o lado horizontal inferior da mesa, começa o seu movimento percorrendo um segmento da recta de equação cartesiana  $y = x$ ; isto é, circula pelas diagonais dos quadrados que formam a rede inteira  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no plano. Sejam  $\gamma$  a trajectória da bola e  $T$  o respectivo traço; no sistema de coordenadas que estamos a considerar em  $\mathcal{M}$ ,  $T$  é união de segmentos de recta,  $T = \cup_{i=1}^{\mathcal{N}} T_i$ , com  $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ , onde  $T_i \neq T_j$ , se  $i \neq j$ , e as extremidades de cada  $T_i$  pertencem à fronteira de  $\mathcal{M}$  (são vértices ou pontos de colisão da trajectória da bola com as paredes do bilhar). Similarmente,  $\gamma$  é formada por justaposição de curvas  $\gamma_j$  (isto é,  $\gamma_1$  começa em  $A$  e  $\gamma_{j+1}$  começa onde  $\gamma_j$  acaba) que descrevem o movimento da bola entre duas colisões consecutivas ou entre um vértice e uma colisão. Assim cada curva  $\gamma_j$  tem como traço algum dos  $T_i$ 's, que é percorrido uma só vez por  $\gamma_j$ . De facto, como veremos, se  $i \neq j$ , então  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  têm traços distintos, o que implica que cada  $T_i$  é percorrido exactamente uma vez pela bola.

Começemos por alguns factos imediatos sobre a trajectória no bilhar.

**Facto 1:** *Para cada  $j \geq 1$ , o traço  $T_i$  de  $\gamma_j$  faz sempre um ângulo de  $45^\circ$  com as paredes que contêm as suas extremidades e estas últimas têm*

coordenadas inteiras. Além disso, se  $\gamma_j$  atravessa um dos quadrados  $\mathcal{Q}$  da rede  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (isto é, se  $T_i \cap \mathcal{Q}^\circ \neq \emptyset$ ), então  $T_i \cap \mathcal{Q}$  é uma das diagonais de  $\mathcal{Q}$  (ou seja, a bola entra em  $\mathcal{Q}$  por um vértice e sai pelo vértice oposto).

A demonstração desta afirmação por indução em  $j$  é elementar e utiliza apenas as regras de movimento a que a bola está sujeita dentro do bilhar. Dela resulta o seguinte:

**Facto 2:** *Se  $P$  pertence à fronteira de  $\mathcal{M}$  e a bola passa em  $P$ , então  $P$  tem coordenadas que são inteiros não negativos e*

1.  $P \notin \{A, B, C, D\} \Rightarrow$  há exactamente dois segmentos  $T_i$  e  $T_j$  que têm  $P$  como extremidade;
2.  $P \in \{A, B, C, D\} \Rightarrow$  há um único segmento  $T_i$  que tem  $P$  como extremidade.

**Facto 3:** *Seja  $P$  um ponto da fronteira de  $\mathcal{M}$  e suponha-se que a bola passa em  $P$ . Então ela passa em  $P$  exactamente uma vez.*

Suponha-se que a bola passa duas vezes em algum ponto da fronteira de  $\mathcal{M}$ . Seja  $P$  o primeiro destes pontos na órbita (caminho orientado) a ser repetido, depois da entrada por  $A$ . É claro que  $P \notin B, C, D$ , caso contrário a trajectória terminaria quando a bola alcançasse  $P$  pela primeira vez.

Também é fácil verificar que  $P \neq A$ , uma vez que para que a bola regressasse a  $A$  seria necessário que passasse uma segunda vez no primeiro ponto de colisão da trajectória com as paredes do bilhar. Uma vez que  $P \notin A, B, C, D$ , sejam  $T_i$  e  $T_j$  segmentos da trajectória que permitem aceder a  $P$ . Ora existem pontos da fronteira de  $\mathcal{M}$ , digamos  $X$  e  $Y$ , de colisão ou vértices, tais que  $T_i = XP$ ,  $T_j = YP$  e  $T_i$  e  $T_j$  são os únicos (pelo Facto 2) segmentos da trajectória que permitem alcançar  $P$ . Note-se que, quando a bola passa em  $P$  pela primeira vez, esteve previamente em  $X$  e segue para  $Y$  ou vice-versa; suponhamos, sem perda de generalidade, que a bola vem de  $X$ ; segue então para  $P$  e depois para  $Y$ . Assim, quando a bola regressa a  $P$ , tem de passar antes em  $X$  ou em  $Y$ . Mas isto significa que a bola passa duas vezes em  $X$  ou em  $Y$  antes de o fazer em  $P$ , contrariando a hipótese de que  $P$  é o primeiro ponto da órbita que é repetido.  $\square$

Podemos ainda concluir que a bola percorre cada segmento  $T_i$  uma única vez e que cada  $T_i$  é o traço de  $\gamma_i$ , para todo o  $i$ .

Confirmemos que o traço poligonal da trajectória  $\gamma$  tem um número finito de segmentos de recta.

**Facto 4:**  $\mathcal{N}$  é finito.

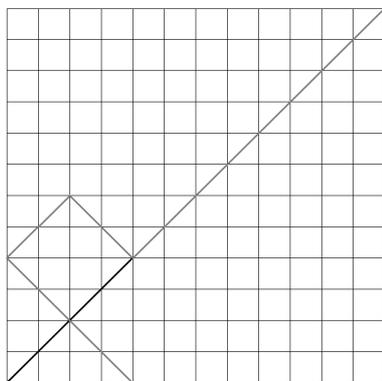
Como a bola parte do vértice  $A$ , pelo Facto 3 nunca regressa a  $A$ . Por outro lado, pelo Facto 2, a bola colide com as paredes do bilhar apenas em pontos de coordenadas inteiras. Ora temos ao todo  $2m + 2n - 4$  pontos disponíveis para colisões; como a bola não pode repetir estes pontos na sua trajectória (Facto 3), então a trajectória não pode permanecer indefinidamente dentro do bilhar. Ou seja,  $T = \cup_{i=1}^{\mathcal{N}} T_i$ , com  $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}^+$  e, de facto,  $\mathcal{N} \leq 2m + 2n - 3$ .  $\square$

Daqui resulta imediatamente que

**Corolário 1** A bola sai de  $\mathcal{M}$  por um dos vértices  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .  $\square$

## 2.1 Interpretação geométrica

Quaisquer que sejam as dimensões do bilhar, podemos formar um quadrado colocando lado a lado réplicas da mesa rectangular do bilhar, como se se tratassem de reflexões em espelhos sucessivos do rectângulo do bilhar. Um tal quadrado de dimensões mínimas tem lado de comprimento igual ao *m.m.c*( $n, m$ ); nele a trajectória da bola não é uma poligonal quebrada, é o segmento de recta, diagonal do quadrado, que une o canto de entrada  $(0, 0)$  e o canto superior direito do quadrado.



$$n = 4, m = 6$$

Inversamente, podemos, por reflexões sucessivas, enrolar a diagonal do quadrado de modo a obter a trajectória em  $\mathcal{M}$ . Podemos formalizar este

processo utilizando a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ :  $(x, y) \bowtie (z, w)$  se e só se

$$\begin{cases} x - z \equiv 0 \pmod{2n} & \text{ou} & x + z \equiv 0 \pmod{2n} \\ y - w \equiv 0 \pmod{2m} & \text{ou} & y + w \equiv 0 \pmod{2m} \end{cases}$$

onde  $\equiv$  designa a relação de congruência relativamente ao módulo fixado (isto é,  $x \equiv z \pmod{2n}$  se e só se a diferença  $x - z$  é um múltiplo inteiro de  $2n$ ). Cada classe de equivalência contém precisamente um elemento em cada um dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$  determinada por reflexões a partir da mesa de bilhar  $\mathcal{M}$ .

Geometricamente, dois pontos em dois destes rectângulos contíguos estão relacionados através de  $\bowtie$  se e só se cada um resulta do outro pela reflexão no lado comum aos rectângulos (que está contido numa das rectas da família  $\mathcal{F}$ ). Deste modo podemos encarar  $\mathcal{M}$  como o espaço quociente  $\mathbb{R}^2 / \bowtie$ . A aplicação quociente,  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ , que a cada  $p \in \mathbb{R}^2$  associa o único ponto  $\Pi(p)$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $p \bowtie \Pi(p)$ , é aberta e uma isometria em cada rectângulo (fechado) da rede  $\mathcal{R}$ , uma vez que se decompõe numa composição de reflexões nas rectas da família  $\mathcal{F}$ . Como consequência,  $\Pi$  envia sobrejectivamente os vértices dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$  nos vértices de  $\mathcal{M}$  e transforma a diagonal (orientada) do quadrado de lado  $m.m.c(n, m)$  na trajectória (orientada) da bola em  $\mathcal{M}$ . Para mais detalhes, veja-se o Apêndice.

Analisemos algumas das propriedades da trajectória da bola à luz desta interpretação. Designemos por  $R^+$  a semi-recta com origem em  $A = (0, 0)$  e contida na recta de equação cartesiana  $y = x$ . Como acabámos de ver, a trajectória da bola em  $\mathcal{M}$  é a imagem por  $\Pi$  da trajectória de uma bola que percorra  $R^+$ , ou parte de  $R^+$ , começando também em  $A$ . Lembremos que os únicos pontos de  $\mathbb{R}^2$  que são enviados por  $\Pi$  nos vértices de  $\mathcal{M}$  são os vértices dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$ . Assim a trajectória da bola em  $\mathcal{M}$  termina num dos vértices de  $\mathcal{M}$  se e só se  $R^+ - A$  contém algum vértice de um dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$ . Ora o conjunto dos vértices dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$  que estão em  $R^+ - A$  é precisamente

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+ : x = \alpha n, x = \beta m \right\}.$$

Ou seja,  $(x, x) \in \mathcal{V}$  se e só se  $x$  é inteiro não negativo múltiplo comum de  $n$  e  $m$ . Assim o ponto  $E = (m.m.c(n, m), m.m.c(n, m))$  está em  $\mathcal{V}$  (é o ponto de  $\mathcal{V}$  mais próximo de  $A$ ) e portanto a sua imagem por  $\Pi$  é um dos vértices de  $\mathcal{M}$ . Além disso,  $\Pi$  transforma sobrejectivamente o segmento  $AE$  na trajectória da bola em  $\mathcal{M}$ , que portanto termina no ponto  $\Pi(E)$  de  $\mathcal{M}$ . O que confirma que a bola sai por um dos vértices,  $\Pi(E)$ , que não

é  $A$  uma vez que  $\Pi(E) = A = (0, 0) \Leftrightarrow (0, 0) \bowtie E$ , o que é equivalente a  $m.m.c.(n, m) \equiv 0 \pmod{2n}$  e  $m.m.c.(n, m) \equiv 0 \pmod{2m}$ , ou seja,  $2n$  e  $2m$  dividem  $m.m.c.(n, m)$ ; o que significa que  $2n$  e  $2m$  dividem  $\frac{nm}{m.d.c.(n, m)}$  e portanto  $2 \times m.d.c.(n, m)$  divide  $n$  e  $m$ ; mas isto é impossível por definição de  $m.d.c.(n, m)$ .

Como a restrição de  $\Pi$  a cada um dos rectângulos da rede é uma isometria, o comprimento da trajectória da bola em  $\mathcal{M}$  é precisamente o comprimento do segmento de recta  $AE$ . Ora  $AE$  é uma diagonal do quadrado de lado  $m.m.c.(n, m)$  e portanto mede precisamente  $\sqrt{2}(m.m.c.(n, m))$ .

A aplicação  $\Pi$  transforma paredes verticais em paredes verticais e horizontais em horizontais. Além disso, os pontos de colisão da bola com as paredes verticais de  $\mathcal{M}$  são as imagens, por  $\Pi$ , dos pontos de intersecção da diagonal  $AE$  com as rectas verticais de equação  $x = kn$ ,  $k = 1, \dots, \frac{m.m.c.(n, m)}{n} - 1$ ; note-se que a intersecção com a recta vertical  $x = m.m.c.(n, m)$  corresponde à saída da bola. Ao todo temos portanto  $\frac{m.m.c.(n, m)}{n} - 1$  colisões com as paredes verticais de  $\mathcal{M}$ .

Similarmente, os pontos de colisão da bola com as paredes horizontais são as imagens, por  $\Pi$ , dos pontos de intersecção da diagonal  $AE$  com as rectas horizontais de equação  $y = jm$ ,  $j = 1, \dots, \frac{m.m.c.(n, m)}{m} - 1$ ; do mesmo modo, a intersecção com a recta  $y = m.m.c.(n, m)$  corresponde à saída da bola. Temos assim  $\frac{m.m.c.(n, m)}{m} - 1$  colisões com as paredes horizontais de  $\mathcal{M}$ . O número total de colisões da bola com as paredes do bilhar é portanto

$$C_T = \frac{n + m}{m.d.c.(n, m)} - 2.$$

Finalmente, resulta da relação  $\bowtie$  um critério que indica previamente qual o vértice de saída da bola a partir dos valores de  $n$  e  $m$ :

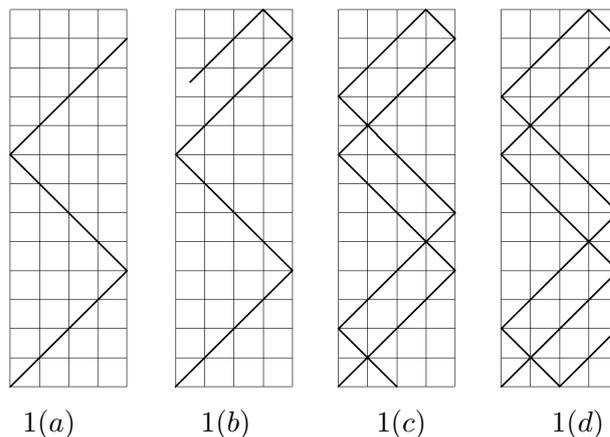
1. Se  $\frac{m}{m.d.c.(n, m)}$  é par, então  $2n$  divide  $\frac{m}{m.d.c.(n, m)} \cdot n$ ; ora,  $\frac{m}{m.d.c.(n, m)} \cdot n = m.m.c.(n, m)$  e portanto  $m.m.c.(n, m) \equiv 0 \pmod{2n}$ . O que significa que a abcissa de  $\Pi(E)$  é nula. Assim, como já sabemos que  $\Pi(E)$  é vértice distinto de  $A$ , concluímos que  $\Pi(E) = D$ .
2. Analogamente, se  $\frac{n}{m.d.c.(n, m)}$  é par, então  $2m$  divide  $\frac{n}{m.d.c.(n, m)} \cdot m$  e portanto  $m.m.c.(n, m) \equiv 0 \pmod{2m}$ . O que significa que a ordenada de  $\Pi(E)$  é nula e que  $\Pi(E) = B$ .
3. Se  $\frac{n}{m.d.c.(n, m)}$  e  $\frac{m}{m.d.c.(n, m)}$  são ímpares, então  $2n$  divide  $\left(\frac{m}{m.d.c.(n, m)} \cdot n + n\right)$  e  $2m$  divide  $\left(\frac{n}{m.d.c.(n, m)} \cdot m + m\right)$ . E portanto  $m.m.c.(n, m) + n \equiv 0 \pmod{2n}$  e  $m.m.c.(n, m) + m \equiv 0 \pmod{2m}$ . O que significa que  $\Pi(E) = C$ .

$0 \pmod{2n}$  e  $m.m.c(n, m) + m \equiv 0 \pmod{2m}$  o que implica que  $\Pi(E) = (n, m) = C$ .

## 2.2 Interpretação algébrica

Sejam  $H_i$  e  $V_j$  as  $i$ -ésima e  $j$ -ésima colisões da bola com as paredes horizontais e verticais, respectivamente. A trajectória da bola começa por ser «ascendente», como na figura 1(a), e, se considerarmos apenas as ordenadas dos pontos  $V_j$ , obtemos a sequência  $n, 2n, 3n, \dots, kn$ , onde  $k \in \mathbb{Z}^+$  é o maior inteiro tal que  $kn \leq m$ . Revemos nesta lista de naturais as primeiras equações de divisão inteira de  $m$  por  $n$  do algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum entre  $n$  e  $m$ .

Suponha-se agora que a trajectória da bola continua como na figura 1(b). Nela se representa o valor  $kn +_m n$ , onde  $+_m$  designa a adição módulo  $m$ . A trajectória da bola prossegue como na figura 1(c), isto é, passa a ser «descendente». Se, nos novos pontos de colisão, em vez das ordenadas  $y$  considerarmos os valores de  $m - y$ , obtemos a sequência  $\zeta, \zeta + n, \zeta + 2n, \dots, \zeta + sn$ , onde  $s$  é o maior elemento de  $\mathbb{Z}_0^+$  tal que  $\zeta + sn \leq m$ .



Mas esta última lista de inteiros não é mais que a sucessão em  $\mathbb{Z}_m$  dada por

$$(k+1) \cdot n, (k+2) \cdot n, \dots, (k+1+s) \cdot n$$

Se a bola agora colidir com a parede  $AB$ , haverá uma inflexão da trajectória para um sentido «ascendente» (veja-se a figura 1(d)) e, após uma nova adição módulo  $m$ , continuamos a obter, de modo semelhante a 1(a), as «potências»

de  $n$  em  $\mathbb{Z}_m$  :

$$(k + 1 + s + 1) \cdot n, (k + 1 + s + 2) \cdot n, \dots$$

Ou seja, os pontos de colisão  $V_j$  são as «potências» sucessivas de  $n$  em  $\mathbb{Z}_m$ . Note-se que, se  $D$  designa o *m.d.c.* ( $n, m$ ), então estas potências são precisamente  $0, n, 2n, \dots, \frac{m}{D}n$ ; em particular, a ordem do subgrupo  $\langle n \rangle$  em  $\mathbb{Z}_m$  é justamente  $\frac{m}{D}$ . Neste contexto, tanto o vértice  $A$  como o de saída podem ser encarados como o elemento neutro de  $\mathbb{Z}_m$ .

Consideremos  $V_{\frac{m}{D}}$ , ponto de colisão com uma parede vertical indexado por  $\frac{m}{D}$ . Uma vez que  $\frac{m}{D} \cdot n = m \equiv 0$  (em  $\mathbb{Z}_m$ ), este ponto também está numa parede horizontal; e portanto é um dos vértices de  $\mathcal{M}$ , o que mostra de novo que a bola acaba por sair de  $\mathcal{M}$ .

O número  $C_V$  de colisões com paredes verticais (excluindo o vértice de entrada e o de saída) é igual a ordem do subgrupo  $\langle n \rangle - 1$ , ou seja  $\frac{m}{D} - 1$ .

Por outro lado, as colisões da bola em paredes horizontais ocorrem sempre que algum múltiplo de  $n$  na lista  $n, 2n, \dots, \frac{m}{D}n$  supera um dado múltiplo de  $m$ . Para calcular o número total  $C_H$  de colisões da bola com paredes horizontais, basta pois saber quantos múltiplos de  $m$  são menores ou iguais a  $\frac{m}{D}n$ : esse número é  $\frac{n}{D}$ . Como o último múltiplo de  $m$  na trajectória da bola corresponde à saída dela de  $\mathcal{M}$ , tem-se  $C_H = \frac{n}{D} - 1$ . E portanto  $C_T = C_V + C_H = \frac{m+n}{D} - 2$ .

Podemos acrescentar a estas estimativas o número de colisões com cada parede, que designamos respectivamente por  $C_{AB}$ ,  $C_{BC}$ ,  $C_{CD}$  e  $C_{DA}$ . De facto, pode provar-se inductivamente que, se  $i$  é ímpar,  $H_i$  é uma colisão em  $CD$  e se  $i$  é par, então  $H_i$  é uma colisão com  $AB$  (e, analogamente, se  $j$  é ímpar,  $V_j$  é uma colisão em  $BC$  e se  $j$  é par, então  $V_j$  é uma colisão com  $AD$ ). Assim, como o conjunto de colisões da bola com a parede  $AD$  é  $\{V_j : 1 \leq j \leq C_V \text{ e } j \text{ é par}\}$  e com a parede  $AB$  é  $\{H_i : 1 \leq i \leq C_H \text{ e } i \text{ é par}\}$ , temos

1.  $\frac{m}{D}$  ímpar  $\Rightarrow C_V$  é par  $\Rightarrow C_{BC}=C_{DA} = \frac{C_V}{2} = \frac{(\frac{m}{D}-1)}{2}$
2.  $\frac{m}{D}$  par  $\Rightarrow C_V$  ímpar  $\Rightarrow C_{BC} = C_{DA} + 1$  e  $C_{DA} = \frac{C_V-1}{2}$
3.  $\frac{n}{D}$  ímpar  $\Rightarrow C_H$  par  $\Rightarrow C_{AB} = C_{CD} = \frac{C_H}{2} = \frac{(\frac{n}{D}-1)}{2}$
4.  $\frac{n}{D}$  par  $\Rightarrow C_H$  ímpar  $\Rightarrow C_{CD} = C_{AB} + 1$  e  $C_{AB} = \frac{C_H-1}{2}$ .

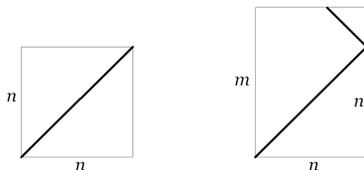
O vértice de saída da bola depende dos inteiros  $\frac{m}{D}$  e  $\frac{n}{D}$ . Como  $\frac{n}{D}$  e  $\frac{m}{D}$  são primos entre si, só temos três casos a considerar:

1. Se  $\frac{m}{D}$  é par, então  $C_V$  é ímpar; como as colisões ímpares ocorrem na parede  $BC$ , concluímos que na última colisão a bola está nessa parede. Logo a bola tem de sair por um dos vértices da parede oposta, isto é, sai em  $A$  ou em  $D$ ; como já vimos que  $A$  não serve como porta de saída, a bola sai por  $D$ . Noutros termos: a bola sai pelo vértice correspondente ao elemento  $\frac{m}{D}.n$  de  $\mathbb{Z}_m$ ; como  $jn$  está na parede  $AD$  quando  $j$  é par, o vértice de saída é  $D$ .
2. Similarmente, se  $\frac{n}{D}$  é par, então a bola sai na parede  $AB$ , a que correspondem colisões  $im$  com  $i$  par. Logo  $B$  é o vértice de saída.
3. Finalmente, se  $\frac{m}{D}$  e  $\frac{n}{D}$  são ambos ímpares, concluímos que a bola sai pela parede  $BC$ , porque  $\frac{m}{D}$  é ímpar, e pela parede  $CD$ , porque  $\frac{n}{D}$  é ímpar. Então a bola sai pelo vértice comum a estas duas paredes, isto é,  $C$ .

Seja  $\mathcal{V} = \{V_j : 0 \leq j \leq \frac{m}{D}\}$  o conjunto dos pontos da trajectória  $T$  correspondentes à órbita  $0, n, 2n, \dots, \frac{m}{D}.n$  em  $\mathbb{Z}_m$ :  $V_0 = A$ ,  $V_{\frac{m}{D}}$  é o vértice de saída da bola e  $V_j$ , com  $j \in \{1, \dots, C_V = \frac{m}{D} - 1\}$ , é ponto de colisão da bola com as paredes verticais. Para  $j \in \{1, \dots, \frac{m}{D}\}$ , seja  $\gamma_j$  a trajectória entre  $V_{j-1}$  e  $V_j$ . Então

$$T = \bigcup_{j=1}^{\frac{m}{D}} \gamma_j$$

e o comprimento de  $T$ ,  $\mathcal{L}(T)$ , é igual a  $\sum_{j=1}^{\frac{m}{D}} \mathcal{L}(\gamma_j)$ . Note-se que cada  $\gamma_j$  é um segmento de recta  $T_j$  ou a união de dois segmentos de recta  $T_j \cup T_k$  com um vértice em comum numa parede horizontal. Ora  $\mathcal{L}(\gamma_j) = \sqrt{2}n$  para todo o  $j$ :



E portanto o comprimento total da trajectória é dado por

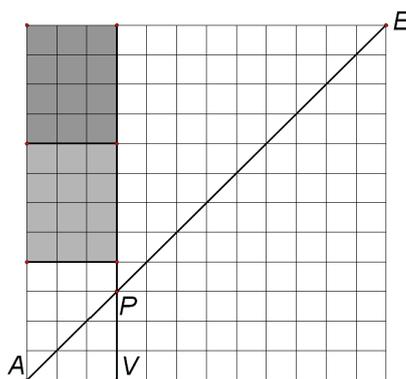
$$\mathcal{L}(T) = \sum_{j=1}^{\frac{m}{D}} \mathcal{L}(\gamma_j) = \sqrt{2}n \cdot \frac{m}{D} = \sqrt{2} m.m.c(n, m).$$

### 2.3 Cálculo do máximo divisor comum

O próximo objectivo é mostrar que o bilhar de lados  $n$  e  $m$ , com  $m \geq n$ , determina o  $m.d.c(n, m)$ . Começemos por recordar que os elementos da órbita de  $n$  em  $\mathbb{Z}_m$  (isto é, os elementos de  $\langle n \rangle$ ) podem ser facilmente identificados usando o quadrado de lado  $m.m.c.(n, m)$ : estes elementos correspondem aos pontos de colisão da bola nas paredes verticais de  $\mathcal{M}$ , além de  $A$  e um outro vértice de saída. Seja  $X$  um desses pontos. Já sabemos que  $X = \Pi(P)$  onde  $P$  resulta da intersecção da diagonal do quadrado, que designámos por  $AE$ , com uma das rectas verticais de equação  $x = k.n$  para algum  $k \in \{0, 1, \dots, \frac{m}{D}\}$ . Como  $P$  está numa parede vertical de um rectângulo  $R$  da rede  $\mathcal{R}$ , consideremos o vértice  $V$  de  $R$  situado na recta vertical que contém  $P$ , abaixo de  $P$ . A aplicação  $\Pi$  transforma  $R$  em  $\mathcal{M}$  através de sucessivas reflexões, sendo por isso uma isometria; logo o elemento de  $\langle n \rangle$  que  $X$  representa satisfaz a igualdade

$$\text{distância de } X \text{ a } \Pi(V) = \text{distância de } P \text{ a } V.$$

O elemento que  $P$  representa em  $\langle n \rangle$  é precisamente o valor desta distância de  $P$  a  $V$ . Na figura seguinte estão assinalados os segmentos  $PV$  num exemplo.



Seja  $\mathcal{O}$  o conjunto dos pontos da fronteira de  $\mathcal{M}$  que são ou pontos de colisão ou o vértice de entrada ou o de saída (o cardinal de  $\mathcal{O}$  é igual a  $\frac{m+n}{m.d.c(n,m)}$ ). Fixemos  $X$  de  $\mathcal{O}$  situado numa das paredes verticais.  $X$  representa um múltiplo de  $n$  em  $\mathbb{Z}$  e um elemento  $X^\sim$  de  $\langle n \rangle$  em  $\mathbb{Z}_m$ . Como vimos,  $X^\sim$  é a distância de  $X$  a um dos vértices dessa parede, digamos  $X^\sim = r$  ou  $X^\sim = m - r$ , onde  $r \in \mathbb{Z}_0^+$  e  $r \leq m$ .

Se  $r = 0$  ou  $m - r = 0$ , então  $X^\sim = 0$  e  $X$  é um dos vértices da parede fixada. Suponha-se pois que  $0 < r < m$  e portanto que  $X$  é um ponto de

colisão. Da nossa interpretação algébrica resulta que  $X$  é o único ponto que representa  $X^\sim$  e nenhum outro elemento de  $\langle n \rangle$  é representado por  $X$ . Note-se ainda que

$$X^{\sim-1} = X^\sim \Leftrightarrow r = m - r \Leftrightarrow r = \frac{m}{2}.$$

Suponha-se que  $r \neq \frac{m}{2}$ . Então  $X^{\sim-1}$  é representado por um ponto  $X'$ , de colisão numa parede vertical, e  $X' \neq X$ . Como a distância de  $X'$  a um dos vértices dessa parede é  $X^{\sim-1}$  (e igual a  $r$  ou a  $m - r$ ), concluímos que há pelo menos dois pontos distintos, de colisão nas paredes verticais, que distam  $r$  de um dos vértices (e  $m - r$  do outro vértice). Mas de facto há precisamente dois destes pontos,  $X$  e  $X'$ : se um ponto  $Y$  de  $\mathcal{O}$  está numa parede vertical e dista  $r$  de um dos vértices dessa parede, então  $Y$  representa (em  $\mathbb{Z}_m$ )  $r$  ou  $m - r$ , ou seja,  $X^\sim$  ou  $X^{\sim-1}$  e, conseqüentemente,  $Y = X$  ou  $Y = X'$ .

Consideremos agora o caso em que  $X^{\sim-1} = X^\sim$ , isto é,  $r = \frac{m}{2}$ . Seja  $Y$  de  $\mathcal{O}$  situado numa parede vertical e equidistante dos vértices dessa parede;  $Y$  representa simultaneamente  $X^{\sim-1}$  e  $X^\sim$  e portanto  $Y = X$ . Logo há no máximo um ponto de  $\mathcal{O}$ , numa parede vertical, que se encontra equidistante dos respectivos vértices.

Observemos agora os pontos  $\Delta$  de  $\mathcal{O}$  nas paredes verticais que representam  $D = m.d.c(n, m)$ . Note-se que  $1 \leq D \leq m$  e que  $D = m$  (isto é,  $D$  é zero em  $\mathbb{Z}_m$ ) se e só se  $n = m$ , e neste caso  $\Delta = A$  ou  $\Delta = C$ . Se  $D < m$ , então  $D$  é representado por um único ponto  $\Delta$  de colisão numa das paredes verticais. E temos:

1.  $D = \frac{m}{2}$

Neste caso o ponto  $\Delta$  está equidistante dos vértices e, pelo que vimos, é único nas paredes verticais com esta propriedade. Na verdade podemos concluir mais: como  $D \leq n \leq m = 2D$ , temos  $1 \leq \frac{n}{D} \leq 2$ ; daqui resulta que, por ser inteiro,  $\frac{n}{D}$  tem de ser 1 ou 2. Se  $\frac{n}{D} = 1$ ,  $n = D = \frac{m}{2}$ ; se  $\frac{n}{D} = 2$ , então  $n = 2D = m$ , o que não é possível pois implicaria que  $D = m$ . Assim  $m = 2n$  e  $\Delta$  é o único ponto de colisão com as paredes.

2.  $D \neq \frac{m}{2}$

Pelo que vimos, existem precisamente dois pontos de  $\mathcal{O}$  nas paredes verticais,  $\Delta$  e  $\Delta'$ , cuja distância a um dos vértices dessas paredes é  $D$ . Note-se que, se  $X \in \mathcal{O}$  é um ponto de colisão nas paredes verticais e se  $r$  designa a menor das distâncias de  $X$  aos vértices dessa parede,

então  $r \geq D$  uma vez que  $r$  e  $D$  são elementos de  $\langle n \rangle$  e  $D$  é o menor elemento de  $\mathbb{Z}_m$  que está em  $\langle n \rangle$ .

Em ambos os casos concluímos que:

**Proposição 2** *O(s) ponto(s) de colisão nas paredes verticais que se encontra(m) mais perto de um dos vértices determina(m) D: D é precisamente a distância de um desses pontos ao vértice mais próximo.  $\square$*

Vejamos contudo outro método eficaz para determinar  $D$ . Seja  $X \in \mathcal{O}$  situado numa das paredes verticais  $AD$  ou  $BC$ . Representaremos por  $\bar{X}$  o elemento de  $\langle n \rangle$  em  $\mathbb{Z}$  que é representado por  $X$ . Existe um inteiro  $\alpha \geq 0$  tal que  $\bar{X} = \alpha n$ , sendo  $X = A$  se e só se  $\alpha = 0$ , e  $X \in AD$  se e só se  $\alpha$  é par. Por outro lado, pelo algoritmo de divisão inteira, existem inteiros não negativos  $q$  e  $r$  tais que  $0 \leq r < m$  e  $\bar{X} = qm + r$ , correspondendo  $X$  a um dos vértices quando  $r = 0$ . Ora o elemento  $X^\sim$  de  $\langle n \rangle$  em  $\mathbb{Z}_m$  que é representado por  $X$  é precisamente  $r$ ; além disso, se  $q$  é par, então  $X = A$  ou  $X = B$  ou  $X$  é ponto de colisão em rota ascendente; se  $q$  é ímpar, então  $X = C$  ou  $X = D$  ou  $X$  é ponto de colisão em rota descendente.

Vejamos de seguida que a distribuição dos pontos da trajectória que estão na fronteira de  $\mathcal{M}$  segue um padrão determinado pelo *m.d.c*( $n, m$ ).

**Proposição 3** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{O}$ ,  $X \neq Y$  pontos situados numa mesma parede vertical,  $AD$  ou  $BC$ . Então  $2D$  divide a distância de  $X$  a  $Y$ .*

*Prova:* Usando a notação anterior, existem inteiros não negativos  $\alpha, \beta, q_1, q_2, r_1$  e  $r_2$  tais que  $\bar{X} = \alpha n = q_1 m + r_1$ ,  $\bar{Y} = \beta n = q_2 m + r_2$  e  $0 \leq r_1, r_2 < m$ . Suponhamos sem perda de generalidade que  $\bar{X} < \bar{Y}$  (logo,  $\alpha < \beta$  e  $q_1 \leq q_2$ ). Como  $X$  e  $Y$  estão na mesma parede vertical,  $\alpha$  e  $\beta$  são ambos pares ou ambos ímpares. Logo  $\alpha \pm \beta$  é par. Dividamos agora o argumento nos seguintes casos:

1.  $X$  e  $Y$  são pontos de colisão.

Há diferentes possibilidades para a chegada da trajectória aos pontos  $X$  e  $Y$ . De facto a distância entre  $X$  e  $Y$  pode ser dada por  $|r_2 - r_1|$  e nesse caso  $q_2 - q_1$  é par; isto é, a distância é igual a  $|(\beta - \alpha)n - (q_2 - q_1)m|$  e, como  $D$  divide  $n$  e  $m$ , e 2 divide  $\beta - \alpha$  e  $q_2 - q_1$ , resulta que  $2D$  divide a distância de  $X$  a  $Y$ . Mas a distância de  $X$  a  $Y$  pode também ser  $r_1 + r_2 - m$  e nesse caso  $q_2 + q_1$  é ímpar; isto é, a distância é igual a  $(\beta + \alpha)n - (q_2 + q_1 + 1)m$  e, como  $D$  divide  $n$  e  $m$ , e 2 divide  $\beta + \alpha$  e  $q_2 + q_1 + 1$ , então  $2D$  divide a distância de  $X$  a  $Y$ .

2.  $X$  é ponto de colisão e  $Y$  é um dos vértices  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

Neste caso  $r_2 = 0$ . A distância de  $X$  a  $Y$  pode ser dada por  $r_1$ , ou seja,  $(\beta + \alpha)n - (q_2 + q_1)m$ , e  $q_2 + q_1$  é par; como  $D$  divide  $n$  e  $m$ , e 2 divide  $\beta + \alpha$  e  $q_2 + q_1$ ,  $2D$  tem de dividir a distância de  $X$  a  $Y$ . E a distância pode também ser dada por  $m - r_1$ , ou seja,  $-(\beta + \alpha)n + (q_2 + q_1 + 1)m$ , sendo  $q_2 + q_1$  ímpar; como  $D$  divide  $n$  e  $m$ , e 2 divide  $\beta + \alpha$  e  $q_2 + q_1 + 1$ , analogamente resulta que  $2D$  divide a distância de  $X$  a  $Y$ .

3.  $X = A$ ,  $Y \in AD$ .

Neste caso  $r_1 = q_1 = 0$  e  $\beta$  é par. Assim quando  $q_2$  é par, a distância de  $X$  a  $Y$  é igual a  $r_2$ , ou seja,  $\beta n - q_2 m$ ; como  $2D$  divide  $\beta n$  e  $q_2 m$ , divide a distância de  $X$  a  $Y$ . Quando  $q_2$  é ímpar, a distância de  $X$  a  $Y$  é igual a  $m - r_2$ , ou seja,  $-\beta n + (q_2 + 1)m$ ; como  $2D$  divide  $\beta n$  e  $(q_2 + 1)m$ , divide a distância de  $X$  a  $Y$ .  $\square$

**Corolário 2** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{O}$ ,  $X \neq Y$ , pontos situados numa mesma parede horizontal,  $AB$  ou  $CD$ . Então  $2D$  divide a distância de  $X$  a  $Y$ .*

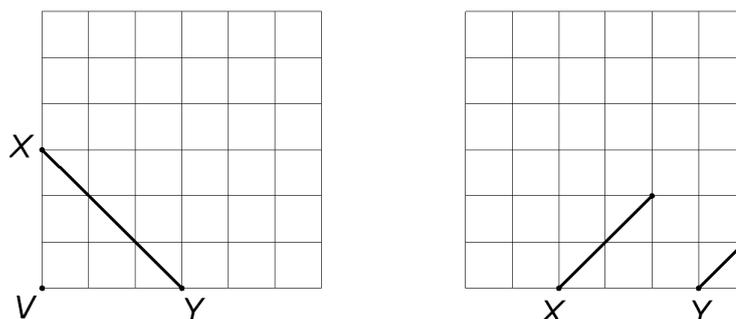
*Prova:* Quando  $X$  e  $Y$  não são ambos vértices do bilhar, basta notar que existem pontos  $X'$  e  $Y'$  de  $\mathcal{O}$ , situados numa mesma parede vertical, tais que  $XX'$  e  $YY'$  são segmentos da trajectória da bola (um deles eventualmente reduzido a um ponto) e a distância de  $X$  a  $Y$  é igual à distância de  $X'$  a  $Y'$ . Se  $X$  e  $Y$  são vértices, então coincidem com  $A$  e  $B$  (digamos  $X = A$  e  $Y = B$ ) e existe  $Y' \in AD$  tal que  $YY'$  é segmento da trajectória da bola e a distância de  $X$  a  $Y$  (que é  $n$ ) é igual à distância de  $X$  a  $Y'$ .  $\square$

**Definição 1** *No que se segue, diremos que dois pontos distintos  $X, Y \in \mathcal{O}$  são pontos consecutivos da trajectória se e só se uma das duas condições seguintes for satisfeita:*

1.  $X$  e  $Y$  estão em paredes distintas e  $(XV \cup VY) \cap \mathcal{O} = \{X, Y\}$ , onde  $V$  é o vértice comum às paredes onde moram  $X$  e  $Y$ .
2.  $X$  e  $Y$  estão numa mesma parede e  $XY \cap \mathcal{O} = \{X, Y\}$ .

**Proposição 4** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{O}$ ,  $X \neq Y$ ,  $X$  situado numa parede horizontal e  $Y$  numa parede vertical e suponha-se que  $X$  e  $Y$  são pontos consecutivos da trajectória. Então:*

1. *Se  $X$  e  $Y$  não são vértices, a distância de  $X$  a  $V$  é igual à distância de  $V$  a  $Y$ , onde  $V$  é o vértice comum às duas paredes;*



2.  $\mathcal{D}(X, Y) \geq 2D$ , onde  $\mathcal{D}$  designa a métrica do táxi.

*Prova:*

1. Como o movimento da bola se faz ao longo de segmentos de recta que intersectam as paredes do bilhar num ângulo de  $45^\circ$ ,  $XV$  e  $VY$  são lados de um triângulo isósceles, rectângulo em  $V$ .
2. Pela alínea anterior, se  $X$  e  $Y$  estão em paredes distintas,  $\mathcal{D}(X, Y)$  é igual a duas vezes a distância de  $V$  a  $Y$ . E a distância de  $V$  a  $Y$  é maior ou igual a  $D$  por Proposição anterior.

Se  $X$  e  $Y$  estão numa mesma parede, por Proposição anterior e o Corolário que lhe segue,  $2D$  divide a distância entre  $X$  e  $Y$  (que é neste caso também a distância de táxi entre  $X$  e  $Y$ ). Logo esta é maior ou igual a  $2D$ .  $\square$

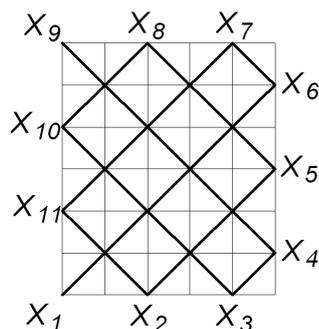
**Corolário 3** A distância  $\mathcal{D}$  entre dois quaisquer pontos consecutivos de  $\mathcal{O}$  é  $2D$ .

*Prova:* Seja  $l = \frac{m+n}{D}$  e designemos por  $X_1 = A, X_2, \dots, X_l$  os  $l$  pontos de  $\mathcal{O}$ , sendo a indexação feita de modo a respeitar a orientação positiva do bordo do rectângulo  $\mathcal{M}$  e de modo que, para  $i = 1, \dots, l-1$ ,  $X_i$  e  $X_{i+1}$  sejam pontos consecutivos de  $\mathcal{O}$ .

Já vimos que  $\mathcal{D}(X_i, X_{i+1}) \geq 2D$  para todo o  $i$ . Além disso, se  $\mathcal{D}(X_i, X_{i+1}) > 2D$  para algum  $i \in \{1, \dots, l-1\}$ , então teríamos

$$2(m+n) = \sum_{i=1}^{l-1} \mathcal{D}(X_i, X_{i+1}) + \mathcal{D}(X_l, X_1) > \sum_{i=1}^{l-1} 2D + 2D = 2D \times l = 2(m+n).$$

$\square$



**Corolário 4** *Seja  $Z$  o ponto de  $(\mathcal{O} - \{A\}) \cap AD$  que está mais próximo do vértice  $A$ . Então  $\mathcal{D}(A, Z) = 2D$ .*

*Prova:* Basta observar que  $A$  e  $Z$  são pontos consecutivos de  $\mathcal{O}$ .  $\square$

Os corolários seguintes são igualmente imediatos:

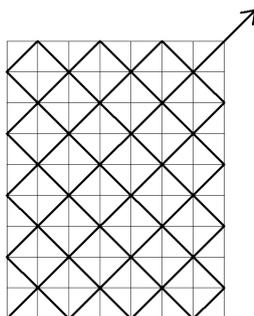
**Corolário 5** *Sejam  $X$  e  $Y$  pontos de  $\mathcal{O}$ . Então  $2D$  divide  $\mathcal{D}(X, Y)$ .*  $\square$

**Corolário 6** *Seja  $X$  um ponto da fronteira de  $\mathcal{M}$ . Então  $X \in \mathcal{O}$  se e só se  $2D$  divide  $\mathcal{D}(X, A)$ .*  $\square$

Reformulemos neste contexto o nosso critério para determinar previamente o vértice de saída da bola, utilizando o corolário anterior: se, a partir do vértice  $A$  marcarmos os pontos da rede inteira que estão na fronteira da mesa de bilhar  $\mathcal{M}$  separados entre si por distância  $\mathcal{D}$  igual a  $2D$ , encontramos todos os pontos da fronteira por onde a trajectória pode passar. E, como veremos, além de  $A$  só um outro vértice é deste modo assinalado, sendo portanto esse o vértice de saída:

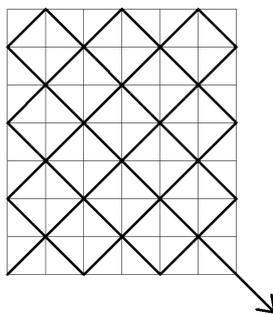
1.  $m$  e  $n$  ímpares: Neste caso  $D$  é ímpar e  $2D$  não divide nem  $m$  nem  $n$ ; logo, pelo corolário anterior, os vértices  $B$  e  $D$  não pertencem a  $\mathcal{O}$ . E portanto o vértice de saída é  $C$ .

Note-se que existem inteiros não negativos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $m = \alpha \times 2D + D$  e  $n = \beta \times 2D + D$ . Para determinar  $D$ , basta encontrar o ponto da parede  $AD$  (respectivamente  $BC$ ) mais próximo de  $D$  (respectivamente  $B$ ) e medir a distância entre esse ponto e o vértice  $D$  (respectivamente  $B$ ).



2.  $m$  ímpar e  $n$  par: Agora  $D$  é ímpar e  $2D$  não divide  $m$  nem  $n + m$  (ambos ímpares), logo os vértices  $C$  e  $D$  não pertencem a  $\mathcal{O}$ . E portanto o vértice de saída é  $B$ .

Para determinar  $D$ , basta encontrar o ponto da parede  $AD$  (respectivamente  $BC$ ) mais próximo de  $D$  (respectivamente  $C$ ) e medir a distância entre esse ponto e o vértice  $D$  (respectivamente  $C$ ).

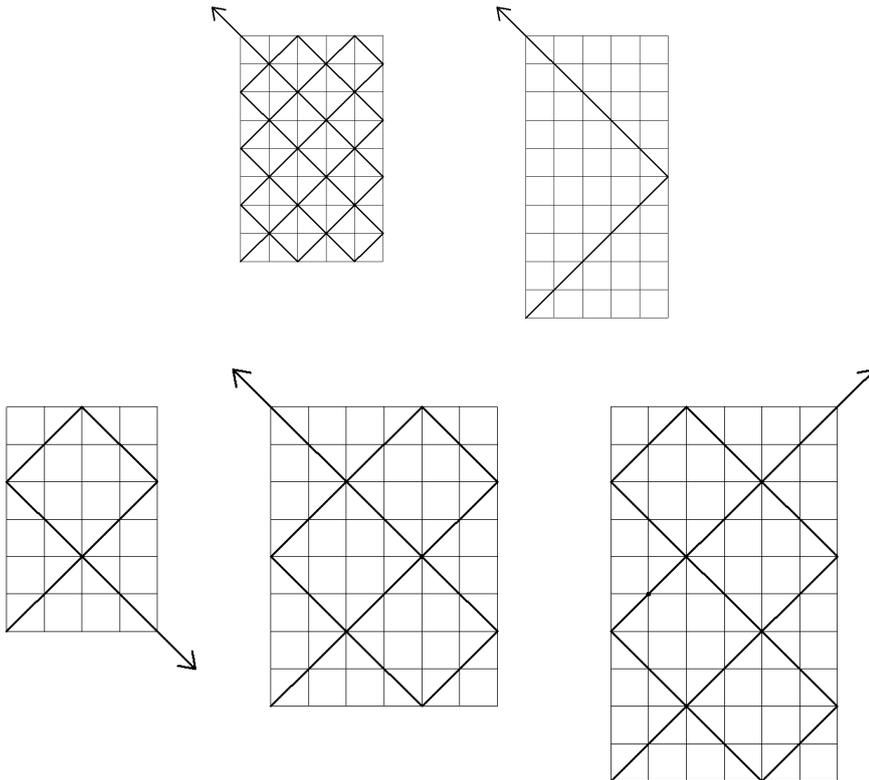


3.  $m$  par e  $n$  ímpar: Tal como no caso anterior,  $D$  é ímpar e  $2D$  não divide  $n$  nem  $n + m$ , logo os vértices  $B$  e  $C$  não pertencem a  $\mathcal{O}$ . E portanto o vértice de saída é  $D$ .

Os pontos da parede  $BC$  mais perto dos vértices  $B$  ou  $C$  dão-nos  $D$  como a distância entre o vértice e esse ponto mais próximo. Quando  $m = 2D$ , só existe um destes pontos mais próximos, equidistante de  $B$  e  $C$ .

4.  $m$  par e  $n$  par Neste contexto, os três vértices  $B$ ,  $C$  ou  $D$  podem ser vértices de saída.

Note-se contudo que  $D$  é par e que



- $2D$  tem de dividir  $n$  ou  $m$  ou  $n + m$  pois a bola sai do bilhar;
- $2D$  só pode dividir um dos três números  $n$ ,  $m$  ou  $n + m$ , caso contrário dividiria simultâneamente  $n$  e  $m$  e o máximo divisor comum de ambos seria  $2D$  e não apenas  $D$ .

E portanto, conhecidos  $n$  e  $m$ , fica assinalado um só vértice além de  $A$  para passagem da trajectória e esse é o vértice de saída, sendo que:

- se  $2D$  divide  $n$ , a bola sai pelo vértice  $B$ ;
- se  $2D$  divide  $m$ , a bola sai pelo vértice  $D$ ;
- se  $2D$  divide  $n + m$ , a bola sai pelo vértice  $C$ .

### 3 $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ e $\text{tg}(\theta) \neq 1$

Suporemos nesta secção que a trajectória inicial da bola faz um ângulo  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  com o eixo dos  $x$ 's. Pelas regras a que está sujeito o movimento

da bola, em cada colisão com uma parede da mesa rectangular do bilhar o ângulo de incidência é igual ao de reflexão, daí que:

- o ângulo de incidência nas paredes verticais do bilhar seja  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ;
- o ângulo de incidência nas paredes horizontais do bilhar seja  $\theta$ .

Tal como se fez na secção anterior, comecemos por desdobrar a mesa do bilhar numa rede de rectângulos de lados que são múltiplos inteiros de  $n$  e  $m$ , onde a trajectória da bola se visualiza como a semi-recta  $R_\theta^+$ , no primeiro quadrante, de origem em  $(0, 0)$  e inclinação  $tg(\theta)$ . Podemos desde já verificar que, tal como no caso em que  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , a bola sai por um dos cantos.

### 3.1 Prova da Proposição 1

Suponhamos que  $tg(\theta) = \frac{a}{b}$ , onde  $a$  e  $b$  são naturais primos entre si. Note-se que, se a órbita da bola passa por algum canto do bilhar que não o de entrada, então sai por esse canto; além disso, essa passagem por um canto é descrita, na versão desdobrada do bilhar, pela intersecção da semi-recta  $R_\theta^+$  com a rede de pontos de coordenadas  $(jn, km)$ , onde  $j$  e  $k$  são inteiros positivos quaisquer. Ora o ponto do plano de abcissa  $b \times m.m.c(m, n)$  e ordenada  $a \times m.m.c(m, n)$  é um destes vértices, é distinto do vértice de entrada e pertence à semi-recta  $R_\theta^+$ , uma vez que

$$\frac{a \times m.m.c(m, n)}{b \times m.m.c(m, n)} = \frac{a}{b} = tg(\theta).$$

O segmento de recta que une  $(0, 0)$  a este ponto representa, eventualmente com multiplicidade, a trajectória da bola. Logo ela sai por algum canto.

Reciprocamente, suponhamos que a bola sai por um dos cantos. Então, por construção da versão desdobrada do bilhar, concluímos que:

- a órbita é um segmento de recta que une  $(0, 0)$  a um vértice  $V$  da rede e tem inclinação  $tg(\theta)$ ;
- $V = (jn, km)$ , para algum par de inteiros positivos  $j$  e  $k$ . E portanto,  $tg(\theta) = \frac{km}{jn}$ , que é racional.  $\square$

Note-se que a bola não passa mais do que uma vez num mesmo ponto de colisão nem sai pelo vértice  $(0, 0)$ . A prova desta afirmação é a mesma que apresentámos para o caso em que  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e assenta no facto de existirem

quando muito dois segmentos de recta, do traço da trajectória da bola, que permitem aceder a cada um desses pontos.

Analisemos agora em detalhe os dois casos a considerar, quando  $tg(\theta)$  é racional e quando não é.

### 3.2 Prova do Teorema 2: $tg(\theta) \in \mathbb{Q}^+$

#### 3.2.1 Versão geométrica

Sejam  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  e  $a$  e  $b$  inteiros positivos tais que  $m.d.c(a, b) = 1$  e  $tg(\theta) = \frac{a}{b}$ . Recorreremos em seguida à interpretação geométrica que delineámos acima para generalizar as fórmulas anteriores.

1. A trajectória da bola é a projecção, via  $\Pi$ , em  $\mathcal{M}$  de um segmento de recta  $AE$  contido em  $R_\theta^+$ , sendo  $\Pi(E) \in \Pi(AE - \{A\})$  o vértice de saída da bola. Além disto, sabemos que  $E$  é um vértice de um dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$ , isto é,  $E \in \mathcal{V}$ , onde

$$\mathcal{V} = \left\{ (jn, km) \in \mathbb{R}^2 : k, j \in \mathbb{Z}^+; \frac{km}{jn} = \frac{a}{b} \right\}.$$

Para encontrar o ponto  $E$ , basta observar que ele é o ponto de  $\mathcal{V}$  a menor distância de  $A = (0, 0)$ . Logo basta determinar os menores  $k_0, j_0 \in \mathbb{Z}^+$  tais que  $k_0(bm) = j_0(an)$ . Esta igualdade indica que o número que descreve é simultaneamente múltiplo de  $bm$  e de  $an$ . Por isso, o menor valor  $k_0$  deve ser tal que  $k_0(bm)$  seja o menor múltiplo comum de  $bm$  e de  $an$ ; isto é, devemos ter  $k_0 = \frac{m.m.c(bm, an)}{bm}$ . Analogamente se conclui que  $j_0 = \frac{m.m.c(bm, an)}{an}$ . E portanto

$$\begin{aligned} E &= (j_0n, k_0m) \\ &= m.m.c(bm, an) \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) \\ &= \left( \frac{mb}{m.d.c(bm, an)} \cdot n, \frac{na}{m.d.c(bm, an)} \cdot m \right). \end{aligned}$$

Para determinarmos o vértice de saída da bola, basta recordar que  $\Pi(E)$  é diferente de  $A$  e que se  $\frac{mb}{m.d.c(bm, an)}$  é par, então  $\frac{mb}{m.d.c(bm, an)} \cdot n \equiv 0 \pmod{2n}$ , o que implica que  $\Pi(E) \in AD$  e portanto  $\Pi(E) = D$ . Analogamente, se  $\frac{na}{m.d.c(bm, an)}$  é par, então  $\frac{na}{m.d.c(bm, an)} \cdot m \equiv 0 \pmod{2m}$ , logo  $\Pi(E) \in AB$  e portanto  $\Pi(E) = B$ . Finalmente, se  $\frac{mb}{m.d.c(bm, an)}$  e  $\frac{na}{m.d.c(bm, an)}$  são ímpares, então  $\frac{mb}{m.m.c(bm, an)} \cdot n + n \equiv 0 \pmod{2n}$  e  $\frac{na}{m.m.c(bm, an)} \cdot m + m \equiv 0 \pmod{2m}$ , logo  $\Pi(E) = (n, m) = C$ .

2. Tal como no caso em que  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , o comprimento da trajectória  $\gamma$  é o comprimento do segmento  $AE$ , isto é,

$$\mathcal{L}(\gamma) = m.m.c(bm, an) \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Como  $a = b \operatorname{tg}(\theta)$ , temos  $a^2 + b^2 = b^2 \sec^2(\theta)$  e podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= m.m.c(bm, an) \frac{b \sec(\theta)}{ab} \\ &= m.m.c(bm, an) \frac{\sec(\theta)}{b \operatorname{tg}(\theta)} \\ &= \frac{m.m.c(bm, an)}{b \operatorname{sen}(\theta)}. \end{aligned}$$

3. Como anteriormente, designemos por  $C_V$  o número de colisões nas paredes verticais de  $\mathcal{M}$ , por  $C_H$  o número de colisões nas paredes horizontais e por  $C_T = C_v + C_H$  o número total de colisões. Como vimos,  $C_V$  é o número de rectas verticais da família

$$\mathcal{F} = \left\{ (kn, y) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ (x, km) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

que intersectam o segmento de recta  $AE - \{A, E\}$ . Estas rectas têm equação cartesiana  $x = jn$ , para valores de  $j$  em  $\{1, \dots, j_0 - 1\}$ . Logo

$$\begin{aligned} C_V &= j_0 - 1 \\ &= \frac{m.m.c(bm, an)}{an} - 1 \\ &= \frac{\frac{bm \times an}{m.d.c(bm, an)}}{an} - 1 \\ &= \frac{bm}{m.d.c(bm, an)} - 1. \end{aligned}$$

Similarmente,  $C_H$  é o número de rectas horizontais da família  $\mathcal{F}$  que intersectam o segmento de recta  $AE - \{A, E\}$ ; têm equação cartesiana  $y = km$ , para valores de  $k$  em  $\{1, \dots, k_0 - 1\}$ , por isso

$$C_H = k_0 - 1 = \frac{m.m.c(bm, an)}{bm} - 1 = \frac{an}{m.d.c(bm, an)} - 1.$$

De onde resulta que  $C_T = \frac{bm+an}{m.d.c(bm, an)} - 2$ .

### 3.2.2 Versão algébrica

Provemos algebricamente as generalizações anteriores. Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o automorfismo linear que a  $(x, y)$  associa  $(ax, by)$ .

**Lema 1**  $\mathcal{M}' = h(\mathcal{M})$  é um rectângulo de lados inteiros e a fronteira de  $\mathcal{M}'$  é a imagem por  $h$  da fronteira de  $\mathcal{M}$ .

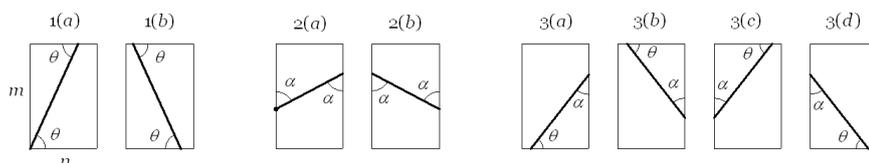
*Prova:* A aplicação  $h$  leva rectas em rectas, preserva o paralelismo, transforma rectas verticais em rectas verticais e rectas horizontais em rectas horizontais (logo  $\mathcal{M}'$  é um rectângulo de lados paralelos aos eixos coordenados) e leva os vértices de  $\mathcal{M}$  nos de  $\mathcal{M}'$ . Além disso, por  $h$  ser um homeomorfismo,  $h(\text{fronteira de } \mathcal{M}) = \text{fronteira de } \mathcal{M}'$ . Um cálculo imediato confirma que  $\mathcal{M}' = [0, an] \times [0, bm]$ .  $\square$

Seja, como anteriormente, para algum  $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{\infty\}$ ,  $T = \cup_{i=1}^{\alpha} T_i$  o traço da trajectória da bola em  $\mathcal{M}$ , onde  $A \in T_1$ , cada  $T_i$  é um segmento de recta cujos extremos estão na fronteira de  $\mathcal{M}$ ,  $T_i \cap T_{i+1}$  se reduz a um extremo comum a  $T_i$  e  $T_{i+1}$ , e  $T_i \neq T_j$  se  $i \neq j$ .

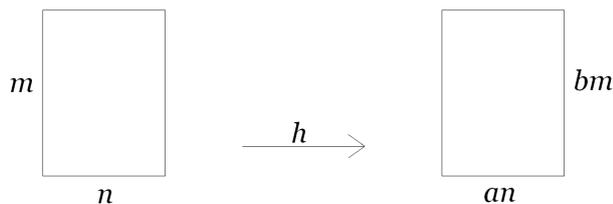
Consideremos, para cada  $i \in \mathbb{Z}^+$  menor ou igual a  $\alpha$ ,  $T'_i = h(T_i)$ . Pelo lema anterior,  $T'_i$  é um segmento de recta cujos extremos estão na fronteira de  $\mathcal{M}'$ . E

**Proposição 5** O segmento de recta  $T'_i$  intersecta os lados de  $\mathcal{M}'$  em ângulos de  $45^\circ$ . E  $\mathcal{L}(T_i) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}ab} \times \mathcal{L}(T'_i)$ .

*Prova:* Como  $T_i$  tem os seus extremos em lados paralelos ou perpendiculares de  $\mathcal{M}$ , o mesmo é válido, via  $h$ , para  $T'_i$  e  $\mathcal{M}'$ . As figuras seguintes (em que  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ ) ilustram as diferentes possibilidades:



Em geral, o comprimento de  $T_i$  é dado por  $\sqrt{r^2 + s^2}$ , onde  $0 \leq r \leq n$ ,  $0 \leq s \leq m$ ,  $r = \mathcal{L}(T_i) \times \cos(\theta)$ ,  $s = \mathcal{L}(T_i) \times \sin(\theta)$  e, como  $\tan(\theta) = \frac{a}{b}$ ,  $r$  e  $s$  verificam a igualdade  $ar = bs$ . Por  $h$ , obtemos novo triângulo de lados  $ar$



e  $bs$ , e o ângulo  $\theta$  é enviado num ângulo  $\theta' \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tal que  $tg(\theta') = \frac{bs}{ar} = 1$ ; logo  $\theta' = \frac{\pi}{4}$ . Além disso,  $ar = bs = \mathcal{L}(T'_i) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T_i) &= \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{b^2} \times r^2} = \frac{r}{b} \sqrt{a^2 + b^2} = \\ &= ar \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = \mathcal{L}(T'_i) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}. \square \end{aligned}$$

É agora imediato concluir que  $T' = \cup_{i=1}^{\alpha} T'_i$  é o traço da trajectória de uma bola em  $\mathcal{M}'$  cujo ângulo de incidência é de  $45^\circ$ . Podemos pois usar os resultados anteriores para provar as fórmulas generalizadas.

Como  $T'$  termina num dos vértices de  $\mathcal{M}'$ ,  $T = h^{-1}(T')$  tem também de terminar num vértice de  $\mathcal{M} = h^{-1}(\mathcal{M}')$ , o que confirma que a bola acaba sempre por sair de  $\mathcal{M}$ . Como vimos na secção 2, o comprimento da trajectória em  $\mathcal{M}'$ , ou seja,  $\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{L}(T'_i)$ , é igual a  $\sqrt{2} \times m.m.c(an, bm)$  e portanto

**Corolário 7** *O comprimento total da trajectória descrita pela bola em  $\mathcal{M}$  é igual a  $m.m.c(an, bm) \times \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ .  $\square$*

Sejam  $C_V$ ,  $C_H$  e  $C_T$  como anteriormente. Pela relação entre os bilhares  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$  via  $h$ , é imediato que  $C_V = C'_V$ ,  $C_H = C'_H$  e  $C_T = C'_T$ , onde  $C'$  designa o número de colisões da bola com a fronteira de  $\mathcal{M}'$ . Logo

**Corolário 8** *Se  $D = m.d.c(an, bm)$ ,  $C_V = \frac{bm}{D} - 1$ ,  $C_H = \frac{an}{D} - 1$  e  $C_T = \frac{an+bm}{D} - 2$ .  $\square$*

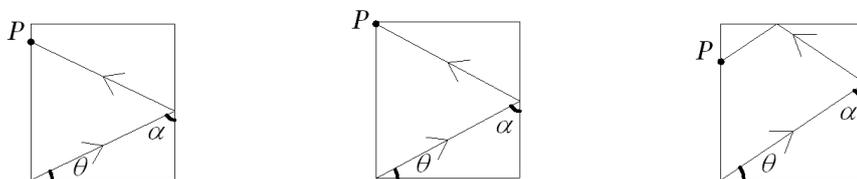
Uma vez que já sabemos como determinar previamente o vértice de saída da bola de um bilhar onde ela entre com ângulo de incidência de  $45^\circ$ , a aplicação  $h$  permite transferir este critério para o bilhar  $\mathcal{M}$ . Claramente a bola sai em  $\mathcal{M}$  pelo vértice  $V$  se e só se a bola em  $\mathcal{M}'$  sai pelo vértice  $h(V)$ ; além disso,  $h$  respeita a ordem dos vértices, logo os cantos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  de  $\mathcal{M}$  correspondem aos vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  respectivamente. Por isso

**Corolário 9 :**

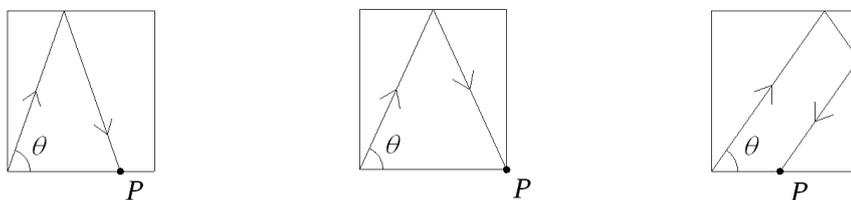
- (i) Se  $\frac{bm}{D}$  é par, a bola sai em  $D$ .
- (ii) Se  $\frac{an}{D}$  é par, a bola sai em  $B$ .
- (iii) Se  $\frac{bm}{D}$  e  $\frac{an}{D}$  são ambos ímpares, a bola sai em  $C$ .  $\square$

Resta traduzir neste contexto mais geral a capacidade que estes bilhares, onde a bola entra com ângulo de  $45^\circ$ , têm de calcular o máximo divisor comum dos lados.

Quando  $\theta = \text{tg}^{-1}(\frac{m}{n})$ , a bola entra em  $A$  e segue pela diagonal ascendente do rectângulo até ao canto  $C$ , por onde sai. Suponhamos agora que  $0 < \theta < \text{tg}^{-1}(\frac{m}{n})$ . A primeira colisão da bola com as paredes do bilhar dá-se na parede  $BC$  e a segunda ou a terceira na parede  $AD$ :



E portanto existe um ponto  $P \in AD - A$  tal que  $P \in T$  (eventualmente igual a  $D$ ). Similarmente, se  $\text{tg}^{-1}(\frac{m}{n}) < \theta < \frac{\pi}{2}$ , existe um ponto  $P \in (AB - A) \cap T$ :



**Corolário 10** Seja  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tal que  $0 < \theta < \text{tg}^{-1}(\frac{m}{n})$  (respectivamente  $\text{tg}^{-1}(\frac{m}{n}) < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) e  $P$  o ponto de  $(AD - A) \cap T$  (respectivamente de  $(AB - A) \cap T$ ) mais próximo de  $A$ . Então a distância de  $A$  a  $P$  é igual a  $\frac{2}{b} \times \text{m.d.c}(an, bm)$  (respectivamente  $\frac{2}{a} \times \text{m.d.c}(an, bm)$ ).

*Prova:* Seja  $P' = h(P)$ ; este é o ponto no bilhar  $\mathcal{M}' = h(\mathcal{M})$  que pertence a  $(A'D' - A') \cap T'$  (respectivamente a  $(A'B' - A') \cap T'$ ) e que está mais próximo de  $A' = A = (0,0)$ . Ora sabemos que, como  $\theta' = \frac{\pi}{4}$ , a distância de  $P'$  a  $A$  é igual a  $2 \times m.d.c.(an, bm)$ . Além disso, a aplicação  $h^{-1}$  multiplica esta distância por  $\frac{1}{b}$  se  $P' \in A'D'$  e por  $\frac{1}{a}$  se  $P' \in A'B'$ . E portanto a distância de  $P$  a  $A$  é dada, respectivamente, por  $\frac{2 \times m.d.c.(an, bm)}{b}$  e  $\frac{2 \times m.d.c.(an, bm)}{a}$ .  $\square$

#### 4 Prova do Teorema 3: $\text{tg}(\theta) \notin \mathbb{Q}^+$

Verificámos na secção 3.1 que, neste caso, a trajectória não sai de  $\mathcal{M}$ . Se  $T$  designa o traço da curva que a bola descreve, então temos  $T = \cup_{i=1}^{\infty} T_i$  onde:

- (i) cada  $T_i$  é um segmento de recta, cujos extremos  $P_{i-1}$  e  $P_i$  estão na fronteira de  $\mathcal{M}$  e  $T_i - \{P_{i-1}, P_i\} \subset \text{interior de } \mathcal{M}$ .
- (ii)  $\forall i \in \mathbb{Z}^+ T_i \cap T_{i+1} = \{P_i\}$
- (iii)  $\forall i, j \in \mathbb{Z}^+, i \neq j, T_i \neq T_j$
- (iv)  $A = P_0 \in T_1$  e  $A \notin T_i \forall i \geq 2$ .

Ou seja, a bola parte de  $A = P_0$  e percorre  $T_1$  uma única vez até alcançar  $P_1$ , após o que percorre  $T_2$  uma única vez e assim sucessivamente. Por outro lado,  $T = \Pi(R_\theta^+)$ ; de facto,  $T = \Pi(R_\theta)$ , onde  $R_\theta$  é a recta que contém  $R_\theta^+$ , uma vez que:

- $T = \Pi(R_\theta^+) \subset \Pi(R_\theta)$ ;
- os pontos de  $R_\theta - R_\theta^+$  são da forma  $(-x_0, -y_0)$  com  $(x_0, y_0) \in R_\theta^+$  e claramente  $(x_0, y_0) \bowtie (-x_0, -y_0)$ , logo  $\Pi(-x_0, -y_0) = \Pi(x_0, y_0)$  que pertence a  $T$ .

Da igualdade  $T = \Pi(R_\theta^+)$ , da irracionalidade da  $\text{tg}(\theta)$  e da natureza das identificações que se efectuam através da aplicação  $\Pi$ , resulta que a trajectória da bola não passa por nenhum ponto da rede inteira com excepção de  $(0,0)$ , o ponto de entrada na mesa do bilhar.

Designemos por  $\omega$  a tangente de  $\theta$ ; mostraremos de seguida que, por  $\omega$  ser um número irracional, a trajectória  $T$  é densa em  $\mathcal{M}$ .

**Lema 2** *Seja  $\mathcal{G}$  o subgrupo aditivo de  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$  gerado por  $2m$  e  $2n\omega$ . Então  $\mathcal{G}$  é denso em  $\mathbb{R}$ .*

*Prova:* Os subgrupos aditivos de  $\mathbb{R}$  são densos em  $\mathbb{R}$  ou discretos (e neste caso da forma  $\beta\mathbb{Z}$  para algum  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ ). Suponha-se que existe um real  $\beta$  tal que  $\mathcal{G} = \beta\mathbb{Z}$ . Então deverão existir inteiros  $i$  e  $j$  tais que  $2m = \beta i$  e  $2n\omega = \beta j$ ; por  $n$  e  $m$  serem não nulos, o mesmo é válido para  $i$  e  $j$ . Daqui resulta que  $\beta = \frac{2m}{i} = \frac{2n\omega}{j}$  e a segunda igualdade informa que  $\omega = \frac{2mj}{2ni}$ , o que não é possível porque  $\omega$  é irracional. E portanto  $\mathcal{G}$  é subgrupo denso.  $\square$

Consideremos em  $\mathcal{M}$  um segmento vertical, de extremos  $P = (r, 0)$  e  $Q = (r, m)$ , onde  $0 \leq r \leq n$ , e designemos por  $Y$  a intersecção da trajectória  $T$  com o segmento  $PQ$ . Os pontos de  $Y$  são as imagens por  $\Pi$  dos pontos de intersecção de  $R_\theta^+$  com as rectas verticais de equação  $x = j \times 2n - r$  e  $x = k \times 2n + r$ , com  $j$  e  $k$  inteiros não negativos; e de facto, no primeiro quadrante, só os pontos com estas abcissas são enviados por  $\Pi$  em  $PQ$ . Observe-se que os pontos de  $R_\theta^+$  comuns às rectas  $x = j \times 2n - r$ ,  $j \in \mathbb{Z}_0^+$ , são da forma  $(j \times 2n - r, \omega(j \times 2n - r))$ ,  $j \in \mathbb{Z}_0^+$ . Contudo, para todos estes valores de  $j$ ,  $(j \times 2n - r, \omega(j \times 2n - r)) \bowtie (r - j \times 2n, \omega(r - j \times 2n))$ ; ou seja,  $Y = \Pi(\mathcal{U})$ , onde  $\mathcal{U} = \{(r + k \times 2n, \omega(r + k \times 2n)) : k \in \mathbb{Z}\}$ . Podemos então escrever

$$Y = \{(r, y) \in PQ : \exists k \in \mathbb{Z} : (r, y) \bowtie (r + k2n, \omega r + k2n\omega)\}.$$

**Lema 3** *Sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $Y$  e  $\mathcal{G}$  como acima. Então  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , onde*

$$Y_1 = \{(r, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \omega r \in \mathcal{G} \cap [-\omega r, m - \omega r]\}$$

$$Y_2 = \{(r, y) \in \mathbb{R}^2 : y + \omega r \in \mathcal{G} \cap [\omega r, m + \omega r]\}.$$

*Prova:* Seja  $(r, y)$  um ponto de  $Y$ ; então  $y \in [0, m]$  e existe inteiro  $k$  tal que  $(r, y) \bowtie (r + k2n, \omega r + k2n\omega)$ . Logo  $y \equiv \omega r + k2n\omega \pmod{2m}$  ou  $y \equiv -\omega r - k2n\omega \pmod{2m}$ ; isto é, existe  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $y - \omega r = j2m + k2n\omega$  ou  $y + \omega r = j2m + (-k)2n\omega$ . No primeiro caso,  $y - \omega r \in \mathcal{G}$  e, como  $0 \leq y \leq m$ , então  $y - \omega r \in [-\omega r, m - \omega r]$ . Ou seja,  $(r, y) \in Y_1$ . Analogamente se prova que, no segundo caso,  $(r, y) \in Y_2$ .

Reciprocamente, seja  $(r, y)$  um ponto de  $Y_1 \cup Y_2$ . Do facto de  $y - \omega r \in [-\omega r, m - \omega r]$  ou  $y + \omega r \in [\omega r, m + \omega r]$  conclui-se facilmente que  $y \in [0, m]$  e portanto que  $(r, y) \in PQ$ . Por outro lado,  $y - \omega r \in \mathcal{G}$  ou  $y + \omega r \in \mathcal{G}$  e portanto existem inteiros  $i$  e  $k$  tais que  $y - \omega r = i2m + k2n\omega$  ou  $y + \omega r = i2m + k2n\omega$ . Igualdades que indicam que  $(r, y) \bowtie (r + k2n, \omega r + k2n\omega)$  para algum inteiro  $k$  e portanto  $(r, y) \in Y$ .  $\square$

**Proposição 6**  $Y$  é denso em  $PQ$ .

*Prova:* Do Lema 2 resulta que  $\mathcal{G} \cap [-\omega r, m - \omega r]$  é denso em  $[-\omega r, m - \omega r]$ . Seja  $\mathcal{T}_{\omega r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a translacção associada ao vector  $(0, \omega r)$ . A aplicação  $\mathcal{T}_{\omega r}$  transforma  $\{r\} \times (\mathcal{G} \cap [-\omega r, m - \omega r])$ , que é denso em  $\{r\} \times [-\omega r, m - \omega r]$ , em  $Y_1$ . Como  $\mathcal{T}_{\omega r}$  é um homeomorfismo e  $\mathcal{T}_{\omega r}(\{r\} \times [-\omega r, m - \omega r]) = PQ$ , resulta que  $Y_1$  é denso em  $PQ$ . Analogamente se comprova que  $Y_2$  é denso em  $PQ$ .  $\square$

**Corolário 11**  $T$  é denso em  $\mathcal{M}$ .

*Prova:* Sejam  $X \in \mathcal{M}$  e  $\epsilon > 0$ . Existem reais  $r$  e  $s$  tais que  $0 \leq r \leq n$ ,  $0 \leq s \leq m$  e  $X = (r, s)$ . Consideremos os pontos  $P = (r, 0)$  e  $Q = (r, m)$  e, como acima,  $Y = T \cap PQ$ . Pela Proposição anterior, existe  $z \in Y$  que dista de  $X$  menos de  $\epsilon$ , o que, como  $z \in T$ , prova que a trajectória  $T$  é densa no bilhar  $\mathcal{M}$ .  $\square$

## 5 Apêndice

Guardámos para este anexo uma demonstração da afirmação feita no texto de que a aplicação  $\Pi$  é aberta e que transforma sobrejectivamente a recta  $R_\theta$  na trajectória  $T$  em  $\mathcal{M}$ .

**Definição 2** Sejam  $k$  um inteiro positivo e  $x, y$  em  $\mathbb{R}$ . Então  $x \sim_k y$  se e só se  $x \equiv y \pmod{k}$  ou  $x \equiv -y \pmod{k}$ . Isto é,  $x \sim_k y$  se e só se  $k$  divide  $x - y$  ou  $k$  divide  $x + y$ .

**Lema 4** A relação binária  $\sim_k$  é de equivalência.

*Prova:* A reflexividade, simetria e transitividade deduzem-se facilmente das propriedades da divisão inteira.  $\square$

**Lema 5** Sejam  $\sim$  e  $\approx$  relações de equivalência em  $\mathbb{R}$  e  $\asymp$  a relação binária em  $\mathbb{R}^2$  dada por  $(x_1, y_1) \asymp (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2$  e  $y_1 \approx y_2$ . Então  $\asymp$  é uma relação de equivalência.

*Prova:* A reflexividade e a simetria são consequência imediata da comutatividade da conjunção. Quanto à transitividade, sejam  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  de  $\mathbb{R}^2$  tais que  $(x_1, y_1) \asymp (x_2, y_2)$  e  $(x_2, y_2) \asymp (x_3, y_3)$ . Então  $x_1 \sim x_2$ ,  $y_1 \approx y_2$ ,  $x_2 \sim x_3$  e  $y_2 \approx y_3$ . Logo  $x_1 \sim x_3$  e  $y_1 \approx y_3$ , ou seja,  $(x_1, y_1) \asymp (x_3, y_3)$ .  $\square$

Fixemos naturais  $n$  e  $m$ ; no que se segue consideraremos em  $\mathbb{R}$  as relações de equivalência  $\sim_{2n}$  e  $\sim_{2m}$ .

**Lema 6**  $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists^1 a \in [0, n] \exists^1 b \in [0, m]$  tais que  $x \sim_{2n} a$  e  $y \sim_{2m} b$ .

*Prova:* Fixemos um real  $x$  e seja  $k$  a característica de  $\frac{x}{n}$ . Assim temos  $kn \leq x < (k+1)n$  e portanto  $a_0 = x - kn$  pertence ao intervalo  $[0, n[$  e  $x = (x - kn) + kn = a_0 + kn$ . Se  $k$  é um inteiro par, então  $2n$  divide  $x - a_0$ , isto é,  $x \sim_{2n} a$ , sendo  $a = a_0$ . Se  $k$  é ímpar, então  $2n$  divide  $x - a_0 + n$  e por isso  $x \sim_{2n} a$ , onde  $a = n - a_0 \in ]0, n]$ .

Provemos agora a unicidade. Suponhamos que existem  $a$  e  $\tilde{a}$  de  $[0, n]$  tais que  $x \sim_{2n} a$  e  $x \sim_{2n} \tilde{a}$ . Então  $a \sim_{2n} \tilde{a}$ , ou seja,  $2n$  divide  $a - \tilde{a}$  ou  $a + \tilde{a}$ . Como  $a$  e  $\tilde{a}$  pertencem ao intervalo  $[0, n]$ , temos  $|a - \tilde{a}| \leq n$  e  $a + \tilde{a} \leq 2n$ , e portanto, se  $2n$  divide  $a - \tilde{a}$ , então  $a - \tilde{a} = 0$ ; se  $2n$  divide  $a + \tilde{a}$ , então  $a + \tilde{a} = 0$  (logo  $a = \tilde{a} = 0$  por serem ambos números não negativos) ou  $a + \tilde{a} = 2n$  sendo que esta igualdade só se pode verificar se  $a = \tilde{a} = n$ . Do mesmo modo se determina o único  $b \in [0, m]$  tal que  $y \sim_{2m} b$ .  $\square$

Designemos por  $\bowtie$  a relação binária em  $\mathbb{R}^2$  dada por:  $(x_1, y_1) \bowtie (x_2, y_2)$  se e só se  $x_1 \sim_{2n} x_2$  e  $y_1 \sim_{2m} y_2$ . Dos Lemas anteriores resulta que:

**Corolário 12**  $\bowtie$  é uma relação de equivalência e para todo o  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  existe um único  $(a, b)$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $(x, y) \bowtie (a, b)$ .  $\square$

**Corolário 13** Cada classe de equivalência de  $\bowtie$  tem um e um só elemento de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

Seja  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  a aplicação que a cada  $p \in \mathbb{R}^2$  associa o único ponto  $\Pi(p)$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $p \bowtie \Pi(p)$ . Note-se que a restrição de  $\Pi$  a  $\mathcal{M}$  é a Identidade e que  $\text{Ker}(\Pi) := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \Pi(p) = \Pi(q)\} = \bowtie$ . Os próximos Lemas caracterizam a acção de  $\Pi$  como a que resulta da composição de reflexões em rectas, horizontais ou verticais, da família  $\mathcal{F}$ .

**Lema 7** Sejam  $R$  e  $S$  dois rectângulos distintos da rede  $\mathcal{R}$  com um lado em comum e  $r$  a recta que contém  $R \cap S$ . Dois pontos,  $P \in R$  e  $Q \in S$ , são tais que  $Q$  resulta de  $P$  por reflexão na recta  $r$  se e só se  $P \bowtie Q$ .

*Prova:* Suponhamos que  $r$  é uma recta vertical. Por hipótese, os lados verticais de  $R$  estão contidos em rectas de equações  $x = kn$ ,  $x = (k+1)n$  e os de  $S$  estão nas rectas  $x = (k+1)n$  e  $x = (k+2)n$ ; além disso,  $P$  e  $Q$  têm a mesma ordenada e as abcissas são da forma  $kn + a$  e  $(k+2)n - a$ . Ora

$2n$  divide  $[(kn + a) + (k + 2)n - a]$ , logo  $P \bowtie Q$ . O caso em que  $r$  é uma recta horizontal é análogo. O recíproco resulta directamente da definição da relação  $\bowtie$ .  $\square$

Dado um rectângulo  $R$  da rede  $\mathcal{R}$ , podemos transformar  $R$  em  $\mathcal{M}$  através de reflexões sucessivas num número finito de rectas da família  $\mathcal{F}$  (horizontais ou verticais). Se  $P \in R$  e  $Q$  é a respectiva imagem em  $\mathcal{M}$  pela composição de tais reflexões, então, por aplicação sucessiva do Lema anterior, concluímos que  $P \bowtie Q$ ; logo  $\Pi(P) = Q$ . Assim a restrição de  $\Pi$  a  $R$  é uma isometria que envia a fronteira de  $R$  na fronteira de  $\mathcal{M}$  e os vértices de  $R$  nos de  $\mathcal{M}$ . E, como esta restrição é uma bijecção sobre  $\mathcal{M}$ ,

**Lema 8** *Cada classe de equivalência de  $\bowtie$  tem exactamente um elemento em cada um dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$ .*  $\square$

Já sabemos que  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  é sobrejectiva e que a restrição a cada rectângulo da rede  $\mathcal{R}$  é um homeomorfismo sobre  $\mathcal{M}$ . Além disso

**Lema 9**  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  é aplicação quociente aberta.

*Prova:* Seja  $\mathcal{U}$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e designemos por  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  a família de rectângulos da rede  $\mathcal{R}$ . Então, para cada  $j$ ,  $\mathcal{U} \cap R_j$  é aberto em  $R_j$  e portanto  $\Pi(\mathcal{U} \cap R_j)$  é um aberto de  $\mathcal{M}$ . Logo

$$\Pi(\mathcal{U}) = \Pi(\cup_j \mathcal{U} \cap R_j) = \cup_j \Pi(\mathcal{U} \cap R_j)$$

é um aberto de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

Como  $\text{Ker}\Pi = \bowtie$ , deduzimos deste lema que

**Corolário 14**  $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^2 / \bowtie$ .  $\square$

Provemos finalmente que  $\Pi$  transforma sobrejectivamente a semi-recta  $R_\theta^+$  na trajectória  $T$  de uma bola que parte de  $A$  com velocidade constante e fazendo com o eixo dos  $x$ 's um ângulo  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Designemos por  $Q_0 = A, Q_1, \dots$  a sequência de  $\alpha$  pontos de entrada, eventual saída e de colisão da bola com as paredes do bilhar  $\mathcal{M}$ . Caso a bola saia por um vértice, a família anterior de pontos é finita,  $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ , sendo  $Q_k$  o canto de saída. Para cada  $i \geq 1$ , seja  $T_i = Q_{i-1}Q_i$  o segmento de  $T$  que une estes dois pontos, orientado de acordo com o movimento da

bola. Nesta notação,  $T$  consiste numa família, eventualmente infinita, de segmentos de recta orientados  $T_1, T_2, \dots$ , sendo que  $T_1 \subset R_\theta^+$ .

Denotaremos por  $P_0 = A, P_1, \dots$  a sequência de pontos de intersecção da semirecta  $R_\theta^+$  com os lados dos rectângulos da rede  $\mathcal{R}$ . No caso de algum  $P_i$  ser vértice de um rectângulo, consideraremos apenas o subconjunto  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ , onde

$$k = \min\{i \in \mathbb{Z}^+ : P_i \text{ é um vértice}\}$$

(isto é, o número de pontos  $P_i$  que interessam é também  $\alpha$ ).

Para cada  $i \in \mathbb{Z}^+$ , seja  $S_i = P_{i-1}P_i$  o segmento de recta de extremos nestes pontos. Mostraremos em seguida, por indução sobre  $i \in \mathbb{Z}_0^+$ , que, para cada  $i$ ,  $\Pi(Q_i) = P_i$  e que  $\Pi$  transforma  $S_i$  em  $T_i$ . Os casos  $i = 0$  e  $i = 1$  são imediatos:  $Q_0 = A = P_0$  e  $Q_1 = P_1$ . Suponhamos que a afirmação é válida para  $i = 0, 1, \dots, j$ , onde  $j < \alpha$ . Então  $\Pi(Q_j) = P_j$  e  $\Pi(S_j) = T_j$ . Como  $j < \alpha$ ,  $P_j$  não é um vértice e portanto  $Q_j$  também não é. Consideremos então os segmentos  $S_j$  e  $S_{j+1}$ ; estão em rectângulos  $R_j$  e  $R_{j+1}$  da rede  $\mathcal{R}$  que têm um lado em comum. Seja  $P \in R_j$  o ponto que se obtém de  $P_{j+1}$  por reflexão na recta que contém  $R_j \cap R_{j+1}$ . Por Lema anterior,  $\Pi(P) = \Pi(P_{j+1})$  e portanto  $\Pi(S_{j+1}) = \Pi(P_jP)$ . Ora  $\Pi(P_jP)$  tem  $\Pi(P_j) = Q_j$  como extremo inicial e, como a restrição de  $\Pi$  ao rectângulo  $R_j$  preserva ângulos, o ângulo que  $P_jP$  faz com o lado de  $R_j$  que contém  $P_j$  é igual ao ângulo que  $\Pi(P_jP)$  faz com o lado de  $\mathcal{M}$  que contém  $Q_j$ . Mas, pela lei da reflexão,  $T_{j+1}$  também faz com esse lado o mesmo ângulo. E portanto  $\Pi(P_jP)$  tem de ser  $T_{j+1}$  e, conseqüentemente,  $Q_{j+1} = \Pi(P_{j+1})$ .

Se  $\alpha = +\infty$ , a prova segue por indução finita. Se  $\alpha = k$ , basta ter em conta que, por construção,  $Q_\alpha = \Pi(P_\alpha)$ .

## Referências

- [1] Gardner, *The sixth book of mathematical games from Scientific American*, Freeman (1971)
- [2] Niven, *Irrational numbers*, The Carus Mathematical Monographs, 11 (1967) MAA
- [3] Steinhaus, *Mathematical snapshots*, Oxford University Press (1983)