A GEOMETRIA DO PLANETA TERRA | ProfMat 2012

ENSINO SECUNDÁRIO

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO

Estudar a Geometria Esférica, explorando algumas diferenças entre esta e a Geometria Euclidiana.

Nota: Em todo o texto que se segue, consideraremos esfera como sendo o conjunto dos pontos do espaço que estão a uma distância constante de um ponto fixado (o centro). No programa da disciplina, um tal conjunto é designado por superfície esférica.

<table>
<tr><th>Tópicos / Subtópicos</th><th>Objetivos</th><th>Vocabulário</th></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria</td><td rowspan="5">Plano
Reta
Segmento de reta
Curva
Esfera
Círculo máximo
Triângulo
Biângulo
Área</td></tr>
<tr><td>Esfera</td><td>▪ Determinar a área de um triângulo esférico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Capacidades transversais</td></tr>
<tr><td>Raciocínio
▪ Justificação
▪ Argumentação

Comunicação
▪ Expressão
▪ Discussão</td><td>▪ Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos.

▪ Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.

▪ Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.</td></tr>
</table>

Nota: Por simplicidade, consideramos esfera como sendo o que também se designa por superfície esférica.

PRÉ-REQUISITOS

Identificação dos lugares geométricos esfera e circunferência; cálculo da área da esfera; noção de triângulo esférico.

RECURSOS

Computadores com o software *Wolfram CDF Player* instalado e o ficheiro *area_triangulo.cdf* que pode ser descarregado de www.atractor.pt/mat/GeomEsf/profmat2012

DURAÇÃO PREVISTA

1 bloco de 90 minutos.

Na página http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros serão utilizados neste projeto numa colaboração entre a Associação de Professores de Matemática e a Associação Atractor. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

I O Urso

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direcção e caminhou 10 Km sempre em direcção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro *"How to solve it"* do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

II Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como *esfera* de centro O e raio $r > 0$ entenderemos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância r de O.

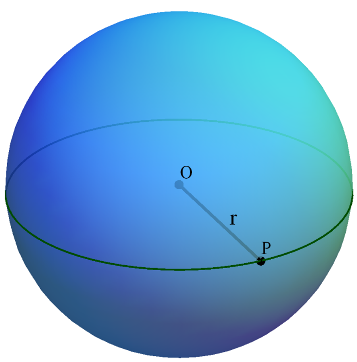


Figura 1: Esfera de centro O e raio r.

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

III Tarefa

Qual é a área de um triângulo esférico?

1. Abre o ficheiro *area_triangulo.cdf* . Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com três pontos móveis assinalados, A, B e C, formando um triângulo.

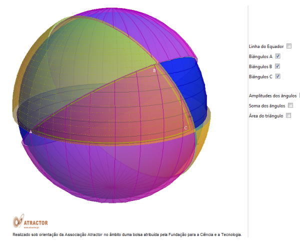


Figura 2: Ficheiro em formato CDF disponível em http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/profmat2012.

2. Clica na caixa *Biângulos A*. Os dois círculos máximos que aparecem dividem a esfera em quantas regiões? Cada uma dessas regiões quantos lados tem?

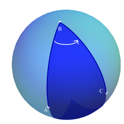
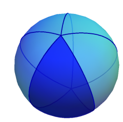


Figura 3: Na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos ou lúnulas. Na figura está assinalado o ângulo ABC do biângulo colorido a azul escuro.

3. Sabendo que a área de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$ e que a área do biângulo é diretamente proporcional à amplitude do seu ângulo, completa a tabela:

Biângulo	Ângulo	Área
semi-esfera	πrad ou $180°$	$2\pi r^2$
$\frac{1}{4}$ de esfera		
$\frac{1}{5}$ de esfera		
$\frac{1}{n}$ de esfera		
biângulo	α	



4. Na aplicação interativa, clica na caixa *Interior do triângulo* e move os pontos de forma a obteres um triângulo esférico "pequeno", ou seja, contido numa semi-esfera. Clica nas caixas *Biângulos A e Biângulos B*. Observa que a intersecção dosdois biângulos (um cor de rosa e outro azul) é o interior do triângulo e que a intersecção dos outros dois corresponde ao interior do triângulo antípoda (triângulo formado pelos antípodas dos pontos do triângulo).
5. Clica na caixa *Biângulos C*. Quantos biângulos aparecem? Qual é a intersecção desses biângulos? Quantas vezes esses biângulos "cobrem" o triângulo e o seu antípoda? E o que acontece na região esférica restante?
6. Relaciona a soma das áreas dos biângulos com a área da esfera e a área do triângulo (nota que o triângulo e o seu antípoda têm a mesma área).

E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a www.atractor.pt/GeomEsf