

**3º CICLO | Tarefa 1**

**PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO**

Estudar a Geometria Esférica, explorando algumas diferenças entre esta e a Geometria Euclidiana.

**Nota:** Em todo o texto que se segue, consideraremos esfera como sendo o conjunto dos pontos do espaço que estão a uma distância constante de um ponto fixado (o centro). No programa da disciplina, um tal conjunto é designado por superfície esférica.

Tópicos / Subtópicos	Objetivos	Vocabulário
<b>Geometria</b>		
<b>Esfera</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Encontrar a curva que minimiza a distância entre dois pontos na esfera.</li> </ul>	Plano Reta Segmento de reta Curva Esfera Círculo máximo
<b>Capacidades transversais</b>		
<b>Raciocínio</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Justificação</li> <li>Argumentação</li> </ul> <b>Comunicação</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Expressão</li> <li>Discussão</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos.</li> <li>Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.</li> <li>Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.</li> </ul>	

**PRÉ-REQUISITOS**

Identificação dos lugares geométricos esfera e circunferência; determinação do comprimento de um arco de circunferência sabendo a amplitude do ângulo ao centro correspondente; interpretação de gráficos.

**RECURSOS**

Computadores com o software *Wolfram CDF Player* instalado e o ficheiro *caminho\_mais\_curto.cdf* que pode ser descarregado de [www.ator.pt/mat/GeomEsf/profmat2012](http://www.ator.pt/mat/GeomEsf/profmat2012)

**DURAÇÃO PREVISTA**

1 bloco de 90 minutos.

---

Na página <http://www.ator.pt/mat/GeomEsf> encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros serão utilizados neste projeto numa colaboração entre a Associação de Professores de Matemática e a Associação Atractor. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de <http://www.wolfram.com/cdf-player/>.

## I O Urso

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direcção e caminhou 10 Km sempre em direcção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direcção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro “How to solve it” do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

## II Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como *esfera* de centro  $O$  e raio  $r > 0$  consideraremos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância  $r$  de  $O$ .

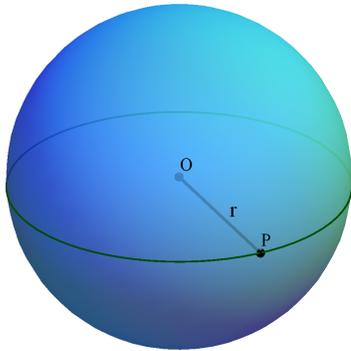


Figura 1: Esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

## III Tarefa

Na esfera, qual é o caminho mais curto entre dois pontos?

1. Abre o ficheiro *caminho\_mais\_curto.cdf*. Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa com uma esfera de centro  $O$  e raio unitário, estando assinalados os pontos na esfera  $A$  (fixo) e  $B$  (móvel). Na esfera, há uma infinidade de circunferências que passam pelos pontos  $A$  e  $B$ . O cursor *Circunferências que passam por A e B* permite variar o centro  $C$  dessas circunferências. Para cada circunferência, o gráfico à direita mostra a medida do comprimento do menor arco de circunferência  $AB$ .

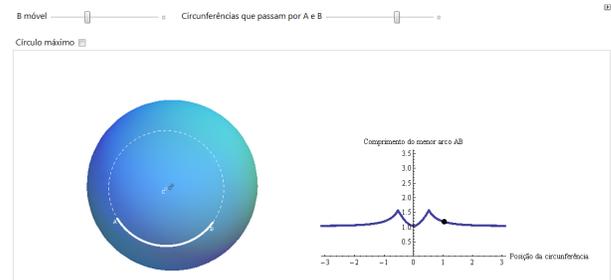


Figura 2: Ficheiro em formato CDF disponível em <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/profmat2012>.

2. Move o cursor *B móvel* para escolheres uma posição de  $B$  na esfera.
3. Desloca o cursor *Circunferências que passam por A e B* e observa, no gráfico, o que acontece ao comprimento do arco  $AB$ . <sup>1</sup>Para quando o comprimento do arco  $AB$  for mínimo. Onde se situa o centro  $C$  da circunferência? Clica na caixa *Círculo máximo*: o que observas?
4. Na Geometria Euclidiana, o caminho mais curto entre dois pontos é dado por um segmento de reta. E na Geometria Esférica? Na esfera, qual a curva que assume o papel análogo ao da reta da Geometria Euclidiana?
5. Dada uma esfera de raio  $r$ , encontra uma forma de calcular a distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  na esfera. Sugestão: usa a amplitude do ângulo  $AOB$ .

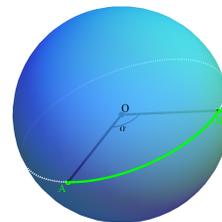


Figura 3: Ângulo  $AOB$  de amplitude  $\alpha$ .

E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a [www.atractor.pt/GeomEsf](http://www.atractor.pt/GeomEsf)

<sup>1</sup>Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla Alt. Também podes: rodar a esfera - coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.