A Geometria do Planeta Terra

No âmbito da iniciativa *Matemática do Planeta Terra 2013,* a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática propõem a realização de um conjunto de tarefas sobre Geometria Esférica. O estudo desta geometria pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores deverão ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. Esta geometria difere em vários aspetos da Geometria Euclidiana e, nestas tarefas, pretende-se iniciar o seu estudo bem como explorar algumas dessas diferenças. O trabalho proposto, de caráter exploratório, recorre a materiais manipuláveis e a ambientes de geometria dinâmica que proporcionam uma melhor visualização e compreensão de determinadas propriedades, facilitando a formulação de conjeturas e desenvolvendo a capacidade de resolução de problemas.

Ano lectivo 2012/2013

Conteúdo

Na página http://atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros (disponíveis em http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino) são utilizados neste projeto numa colaboração entre a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da APM. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

NOTA HISTÓRICA

"E quem desta maneira andar irá caminhar direito." Pedro Nunes (1502-1578)

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado[1]) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia: a curva loxodrómica. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica (Alexander, 2004 [1]).

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas. Estas geometrias surgiram no desenlace da longuíssima história do famoso 5º Postulado de Euclides, mais conhecido pelo Postulado das Paralelas. Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes, ou então de o substituir por outro mais simples. Um dos axiomas equivalentes que é usado nos livros modernos foi dado por Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não interseta r*. (Kline, 1972 [3])

No início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas. Mas foram Lobatschewski (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860) que, de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana (Rosenfeld, 1976 [4]), conhecida atualmente por Geometria Hiperbólica. A Geometria Hiperbólica obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo Axioma Hiperbólico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.* Na Geometria Esférica, o Postulado das Paralelas é substituído pelo Axioma Elíptico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada.*

Bernhard Riemann (1826-1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. (Coxeter, 1998 [2])

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

[1] Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.

Referências

[1] ALEXANDER, James - *Loxodromes: A Rhumb Way to Go.* Mathematics Magazine, Vol. 77, n.º 5, December 2004, pp. 349 - 356.

[2] COXETER, H. S. M. - *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.

[3] KLINE, Morris - *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 3.* Oxford University Press, 1972.

[4] ROSENFELD, B. A. - *A History of Non-Euclidean Geometry.* New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of *Istoriya Neevklidovoi Geometrii.* Moscow: Nauka, 1976.

3º CICLO

Tarefa 1

Planificação

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO

Estudar a Geometria Esférica, explorando algumas diferenças entre esta e a Geometria Euclidiana.

<table>
<tr><th>Tópicos / Subtópicos</th><th>Objetivos</th><th>Vocabulário</th></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria</td><td></td></tr>
<tr><td>Esfera
Superfície Esférica</td><td>▪ Encontrar a curva que minimiza a distância entre dois pontos na superfície esférica.</td><td rowspan="3">Plano
Reta
Segmento de reta
Curva
Esfera
Superfície Esférica
Círculo máximo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Capacidades transversais</td></tr>
<tr><td>Raciocínio
▪ Justificação
▪ Argumentação

Comunicação
▪ Expressão
▪ Discussão</td><td>▪ Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos.
▪ Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
▪ Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.</td></tr>
</table>

PRÉ-REQUISITOS

Identificação dos lugares geométricos esfera, superfície esférica e circunferência; determinação do comprimento de um arco de circunferência sabendo a amplitude do ângulo ao centro correspondente; interpretação de gráficos.

RECURSOS

Computadores com o *software Wolfram CDF Player* instalado (pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/);
ficheiro *caminho_mais_curto.cdf* que pode ser descarregado de www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

DURAÇÃO PREVISTA

1 bloco de 90 minutos.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA 1

Na superfície esférica, qual é o caminho mais curto entre dois pontos?

1. O ficheiro *caminho_mais_curto.cdf* contém uma aplicação interativa com uma esfera de centro O e raio unitário, estando assinalados os pontos na superfície esférica A (fixo) e B (móvel). Na superfície esférica, há uma infinidade de circunferências que passam pelos pontos A e B (estas circunferências obtêm-se intersetando a esfera com um plano). O cursor *Circunferências que passam por A e B* permite variar o centro C dessas circunferências. Para cada circunferência, o gráfico à direita mostra a medida do comprimento do menor arco de circunferência AB.

2. O aluno deve escolher uma posição para o ponto B na superfície esférica e o objetivo é saber qual o caminho mais curto na superfície esférica entre os pontos A e B.

3. Ao deslocar o cursor *Circunferências que passam por A e B* o aluno deve observar que o comprimento do arco AB é mínimo quando o centro C da circunferência coincide com o centro O da esfera. Ao clicar na caixa *Círculo máximo* verifica-se que a circunferência que minimiza a distância entre A e B é um círculo máximo. O professor deve referir que um círculo máximo pode ser definido como a interseção da esfera com um plano que contém o centro da esfera.

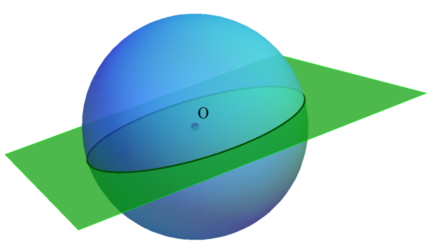

Figura 1: A interseção da esfera com um plano que passa no centro da esfera é um círculo máximo.

4. O aluno deve concluir que, na esfera, os círculos máximos assumem o papel análogo ao das retas da Geometria Euclidiana e os arcos menores de círculo máximo assumem o papel análogo ao dos segmentos de reta. O professor pode referir que a Linha do Equador é um exemplo de um círculo máximo, que os meridianos são semicírculos máximos e que os paralelos (ou paralelos geográficos) são círculos menores paralelos à linha do Equador, sendo o Equador o único paralelo que é simultaneamente um círculo máximo. Neste ponto, o professor deve chamar a atenção para o facto de, caso os pontos sejam antípodas (pontos diametralmente opostos), existir uma infinidade de círculos máximos que os contêm. Nesse caso, não é único o segmento esférico definido pelos dois pontos, apesar dos comprimentos de todos esses segmentos serem iguais. Caso os pontos da superfície esférica A e B não sejam antípodas, então existe um e um só círculo máximo que contém A e B. O segmento esférico definido por A e B é o menor arco do círculo máximo definido por A e B. O professor pode ainda questionar

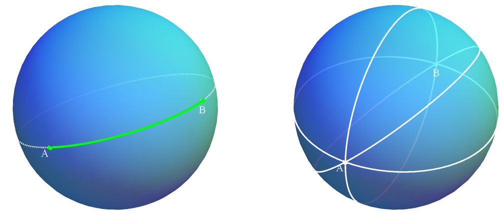

Figura 2: Menor arco de círculo máximo definido por A e B.

os alunos sobre a existência ou não de "retas paralelas" na esfera, ou seja, círculos máximos que não se intersetem. Esta é uma altura apropriada para fazer referência à História da Matemática e ao Postulado das Paralelas (na forma de Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e é paralela a r*). No século XIX, alguns matemáticos aperceberam-se que o Postulado das Paralelas seria independente dos outros 4 postulados da Geometria Euclidiana e então seria possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa a esse postulado. Surgem assim as geometrias não Euclidianas.

5. O aluno deve deduzir que a distância entre A e B é dada pelo comprimento do menor arco AB do círculo máximo definido por A e B (se A e B não forem pontos antípodas) e que pode ser calculada sabendo a amplitude α do ângulo AOB e o raio da esfera:
$d\left(A,B\right) = \alpha r$, α em radianos[2] ou
$d\left(A,B\right) = \frac{\alpha \pi r}{180}$, α em graus.
O professor deve fazer notar que, se A e B são antípodas, a distância entre A e B é igual ao comprimento de um semicírculo máximo, πr.

[2] Se os alunos já tiverem conhecimento dos ângulos medidos em radianos, deve ser dada preferência a essa unidade de medida pela simplicidade da fórmula obtida.

Guião

I O Urso

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direcção e caminhou 10 Km sempre em direcção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro *"How to solve it"* do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

II Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como *superfície esférica* de centro O e raio $r > 0$ consideraremos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância r de O.

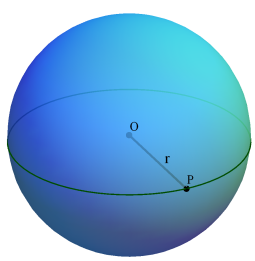

Figura 3: Esfera de centro O e raio r.

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

III Tarefa

Na superfície esférica, qual é o caminho mais curto entre dois pontos?

1. Abre o ficheiro *caminho_mais_curto.cdf* . Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa com uma esfera de centro O e raio unitário, estando assinalados os pontos na superfície esférica A (fixo) e B (móvel). Na superfície esférica, há uma infinidade de circunferências que passam pelos pontos A e B. O cursor *Circunferências que passam por A e B* permite variar o centro C dessas circunferências. Para cada circunferência, o gráfico à direita mostra a medida do comprimento do menor arco de circunferência AB.

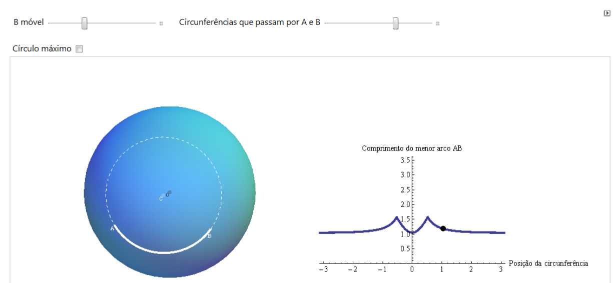

Figura 4: Ficheiro em formato CDF disponível em http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

2. Move o cursor *B móvel* para escolheres uma posição de B na superfície esférica.
3. Desloca o cursor *Circunferências que passam por A e B* e observa, no gráfico, o que acontece ao comprimento do arco AB.[3] Pára quando o comprimento do arco AB for mínimo. Onde se situa o centro C da circunferência? Clica na caixa *Círculo máximo*: o que observas?
4. Na Geometria Euclidiana, o caminho mais curto entre dois pontos é dado por um segmento de reta. E na Geometria Esférica? Na superfície esférica, qual a curva que pode assumir um papel análogo ao da reta da Geometria Euclidiana?
5. Dada uma esfera de raio r, encontra uma forma de calcular a distância entre dois pontos A e B na superfície esférica. Sugestão: usa a amplitude do ângulo AOB.

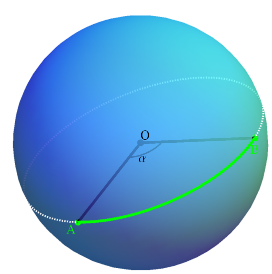

Figura 5: Ângulo AOB de amplitude α.

E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a www.atractor.pt/mat/GeomEsf.

[3]Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla Alt. Também podes: rodar a esfera - coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.

Tarefa 2

Planificação

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO

Estudar a Geometria Esférica, explorando algumas diferenças entre esta e a Geometria Euclidiana.

<table>
<tr><th>Tópicos / Subtópicos</th><th>Objetivos</th><th>Vocabulário</th></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria</td><td rowspan="5">Plano
Reta
Segmento de reta
Curva
Esfera
Superfície Esférica
Círculo máximo
Triângulo
Área</td></tr>
<tr><td>Esfera
Superfície Esférica</td><td>▪ Determinar entre que valores pode variar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Capacidades transversais</td></tr>
<tr><td>Raciocínio
▪ Justificação
▪ Argumentação

Comunicação
▪ Expressão
▪ Discussão</td><td>▪ Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos.
▪ Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
▪ Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.</td></tr>
</table>

PRÉ-REQUISITOS

Identificação dos lugares geométricos esfera, superfície esférica e circunferência; soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo no plano; interpretação de gráficos.

RECURSOS

Computadores com o *software Wolfram CDF Player* instalado (pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/);
ficheiro *soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf* que pode ser descarregado de www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

DURAÇÃO PREVISTA

1 bloco de 90 minutos.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA 2

Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

1. O ficheiro *soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf* contém uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis: A, B e C. O professor pode começar por observar que cada lado do triângulo é dado pelo menor arco de círculo máximo definido por dois vértices do triângulo. Clicando na caixa *Círculos máximos* podem-se ver os três círculos máximos que contêm os lados do triângulo.

2. Se se clicar na caixa *Interior do triângulo* e se mover os pontos através dos cursores A, B e C que estão à direita obtêm-se diferentes triângulos esféricos. O professor deve referir que, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, três pontos distintos na superfície esférica e três lados (arcos de círculo máximo), definem dois triângulos diferentes, na medida em que definem duas regiões limitadas complementares na superfície esférica.

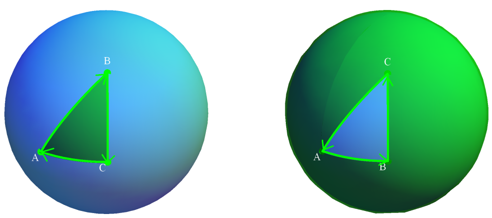

Figura 6: O triângulo $[ABC]$ que se está a considerar é o triângulo com interior verde definido da seguinte forma: estabelecendo o caminho orientado de A para B, de B para C e de C para A, consideramos a região que está sempre à direita do caminho.

3. Ao escolher uma posição para A, B e C e clicando na caixa *Amplitude dos ângulos,* o aluno deverá observar que a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo é superior a $180°$. O professor deverá salientar o facto deste resultado ser muito diferente do correspondente na Geometria Euclidiana.

4. Considerando diferentes triângulos esféricos, o aluno deverá concluir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que $180°$. O professor poderá referir que a diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso é denominada por excesso angular. Em Geometria Euclidiana, o excesso angular de qualquer triângulo é zero e, em Geometria Esférica, é sempre superior a zero.

5. O aluno deverá mover os pontos A, B e C de modo a obter um triângulo esférico com dois ângulos retos, outro triângulo com três ângulos retos e outro triângulo com três ângulos rasos. O professor deverá referir que, no último caso, os pontos são "colineares".

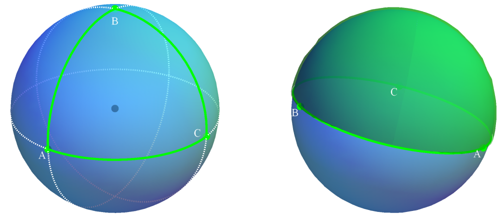

Figura 7: À esquerda: triângulo $[ABC]$ com três ângulos retos. À direita: triângulo $[ABC]$ com três ângulos rasos cujos vértices são colineares.

6. O aluno deverá variar os pontos A, B e C de modo a considerar triângulos *pequenos* (isto é, contidos numa semiesfera) e triângulos *grandes* (isto é, que contêm uma semiesfera) e observar que a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor entre $180°$ e $900°$.

7. O aluno deverá observar que: quando a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de $180°$, a área do triângulo é "quase nula"; quando a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de $900°$, a área do triângulo é próxima da área da esfera. O professor deverá referir que a área do triângulo é diretamente proporcional ao seu excesso angular: quando o excesso angular é um valor próximo de zero (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de $180°$), a área do triângulo é "quase nula"; por outro lado, quando o excesso angular é um valor próximo de $720°$ (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de $900°$), a área do triângulo é próxima da área total da esfera. Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma das amplitudes dos seus ângulos internos, na esfera, todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

Guião

I O Urso

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direcção e caminhou 10 Km sempre em direcção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro *"How to solve it"* do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

II Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como *superfície esférica* de centro O e raio $r > 0$ consideraremos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância r de O.

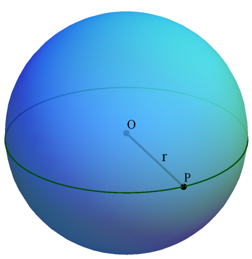

Figura 8: Esfera de centro O e raio r.

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

III Tarefa

Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

1. Abre o ficheiro *soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf* . Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa que contém uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis: A, B e C.

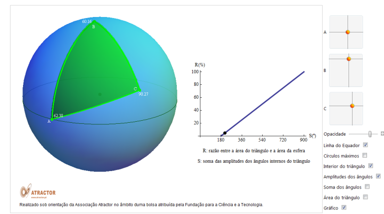

Figura 9: Ficheiro em formato CDF em http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

2. Clica na caixa *Interior do triângulo* e move os pontos através dos cursores A, B e C[4] que estão à direita de forma a obteres diferentes triângulos.

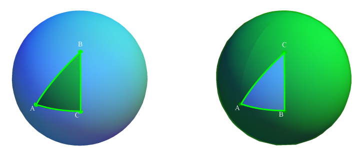

Figura 10: Três pontos distintos na superfície esférica e três lados (arcos de círculo máximo) que definem dois triângulos, na medida em que definem duas regiões limitadas na superfície esférica. O triângulo $[ABC]$ que se está a considerar é o triângulo com interior verde.

3. Escolhe uma posição para A, B e C e clica na caixa *Amplitude dos ângulos*. Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo esférico? Podes clicar na caixa *Soma dos ângulos* para confirmar.
4. Em Geometria Euclidiana, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Será que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico também é constante? Move os pontos de modo a obteres triângulos esféricos diferentes e observa o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de cada um desses triângulos.
5. É possível ter um triângulo esférico com dois ângulos retos? E três ângulos retos? E três ângulos rasos?
6. Entre que valores varia a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?
7. Clica na caixa *Gráfico* e observa o gráfico da função que relaciona a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a sua área relativa (isto é, a razão entre a área do triângulo e a área da esfera). O que concluis?

E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a www.atractor.pt/mat/GeomEsf.

[4] Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla Alt. Também podes: rodar a esfera - coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.