

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Attractor*, este é um espaço da responsabilidade do *Attractor* relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.tractor.pt](http://www.tractor.pt).

Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para [tractor@tractor.pt](mailto:tractor@tractor.pt)

## EM MÉDIA

Uma vez conhecidas as médias aritmética, geométrica e harmónica de uma amostra qualquer de  $n$  números reais positivos, podemos criar conceitos novos combinando-as. O que nos revelam essas médias híbridas?

Face à impossibilidade de medir com exatidão qualquer quantidade física, uma vez que as nossas observações da realidade estão sujeitas a erros, por muito cuidadosos que sejamos, resta-nos compensar esta imperfeição efetuando várias medições e determinando o valor mais provável. De acordo com Gauss, esse valor é o da média aritmética dos resultados obtidos nas sucessivas medições. Todavia, há problemas em que a média apropriada é a geométrica ou a harmónica. Por exemplo, se um comboio viaja durante um intervalo de tempo  $T$  a uma velocidade constante  $v_1$ , e depois o mesmo período de tempo a uma velocidade constante  $v_2$ , então a velocidade média  $v_m$  nesse percurso verifica a igualdade  $v_m = (v_1 \times T + v_2 \times T) / 2T$  e, portanto,  $v_m = (v_1 + v_2) / 2$ , a média aritmética das duas velocidades parcelares. Contudo, se o comboio percorre uma distância  $D$  a uma velocidade constante  $v_1$  e depois a mesma distância  $D$  a uma velocidade constante  $v_2$ , então a velocidade média  $V_m$  do comboio numa viagem que, no tempo total  $T = D/v_1 + D/v_2$  percorre a distância  $2D$ , verifica  $2D = V_m \times T$ , e daqui concluímos que  $V_m = 2 / (1/v_1 + 1/v_2)$ , a média harmónica das velocidades  $v_1$  e  $v_2$ .

Dados  $n$  números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a média aritmética  $A = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$ , a média geométrica  $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$  e a média harmónica  $H = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}$  verificam

$$A \geq G \geq H, \quad (1)$$

dando-se a igualdade se e só se  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Com esta propriedade prova-se facilmente que, entre todos os retângulos no plano com igual perímetro, o quadrado é o que engloba maior área; ou que a sucessão  $\left( (1 + 1/n)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Fixados dois números reais positivos  $a$  e  $b$ , a sua média aritmética-geométrica é obtida através da iteração de um algoritmo que calcula alternadamente a média aritmética e a geométrica, transformando  $(a, b)$  no par de sucessões

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

e, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Note-se que, se  $a = b$ , então  $a_n = a = b_n$  para todo o  $n$ . Quando  $a > b$ , tem-se  $b < b_1$ ,  $a_1 < a$  e, por (1),  $b_1 < a_1$ . Mais geralmente, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$b < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < a$$

e

$$a_{n+1} - b_{n+1} < a_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Logo, as sucessões  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergem, e têm o mesmo limite, que pertence ao intervalo  $]a, b[$  e que designaremos por  $AG(a, b)$ .

A convergência destas duas sucessões é rápida. De facto, uma vez que, para todo o  $a > b > 0$ , a sucessão

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  decresce para  $AG(a, b)$  e temos

$$(a_{n+1})^2 - (b_{n+1})^2 = \frac{(a_n - b_n)^2}{4},$$

se dividirmos ambos os termos desta última igualdade por

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+2}$$

obtemos

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{(a_n - b_n)^2}{8a_{n+2}} < \frac{(a_n - b_n)^2}{8AG(a, b)}.$$

A velocidade de convergência deste algoritmo está na base de um dos processos mais eficientes para calcular aproximações de  $\pi$ . Efetivamente, Gauss provou que

$$AG(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{L} \simeq 1.198140234735\dots$$

onde  $L = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$  é o comprimento da lemniscata (a curva plana que em coordenadas polares se descreve pela equação  $r^2 = \cos(2\theta)$ ). Bastam quinze termos da correspondente sucessão  $(a_n)_n$  para conhecermos mais de dois bilhões de casas decimais da dízima de  $\pi$ . Podem ler-se mais detalhes sobre este capítulo da obra de Gauss em [2].

Na figura 1, as diferentes tonalidades da coloração do gráfico da função  $AG: (a, b) \in ]0, 10[ \times ]0, 10[$ ;  $a > b \mapsto AG(a, b)$  indicam como varia com  $(a, b)$  a velocidade de convergência das sucessões que calculam a média

aritmética-geométrica. Observe também nesta imagem o comportamento da média  $AG$  com a mudança de escala:  $AG(ra, rb) = rAG(a, b)$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e qualquer  $r > 0$ .

Do mesmo modo, podemos considerar a média aritmética-harmônica, obtida calculando-se sucessivamente estas duas médias a partir de uma escolha inicial de dois números reais positivos distintos, digamos  $a > b > 0$ . Mais precisamente,

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \quad d_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

e, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$c_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{2} \quad d_{n+1} = \frac{2c_n d_n}{c_n + d_n}.$$

Repare-se que  $\sqrt{c_1 d_1} = \sqrt{ab}$ ; além disso, como  $(a+b)/2 < a$  e  $a, b > 0$ , tem-se

$$d_1 = \left( \frac{2}{a+b} a \right) b > b;$$

por (1), vale ainda

$$b < d_1 < \sqrt{ab} < c_1 < a.$$

Em geral, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b < d_n < d_{n+1} < \sqrt{ab} < c_{n+1} < c_n < a$$

e

$$\sqrt{c_n d_n} = \sqrt{ab}.$$

Consequentemente,

$$c_{n+1} - d_{n+1} < c_{n+1} - d_n = \frac{c_n - d_n}{2} \quad (2)$$

e, portanto, as sucessões  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergem para o mesmo limite, que designaremos por  $AH(a, b)$  e que tem de ser igual a  $\sqrt{ab}$ . A convergência é de facto mais rápida do que (2) revela, uma vez que

$$c_{n+1} - d_{n+1} = \frac{(c_n - d_n)^2}{4c_{n+1}} < \frac{(c_n - d_n)^2}{4b}.$$

Analogamente, constrói-se a média geométrica-harmônica de um par de números reais  $a > b > 0$  determinando-se alternadamente estas duas médias. Ou seja:

$$e_1 = \sqrt{ab} \quad f_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

e, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$e_{n+1} = \sqrt{e_n f_n} \quad f_{n+1} = \frac{2e_n f_n}{e_n + f_n}.$$

Note-se que  $e_1 = \sqrt{ab} < a$ , que  $f_1 = 2ab/(a+b) > b$  e que  $f_1 < e_1$  por (1). Mais geralmente,

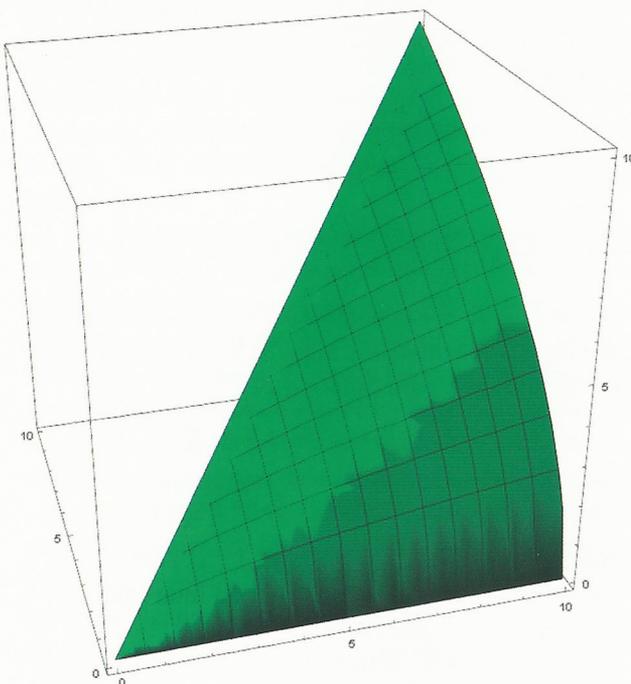


Figura 1.

$$b < f_n < f_{n+1} < e_{n+1} < e_n < a \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$e_1 = \sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}}$$

$$f_1 = \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}.$$

Indutivamente, pode confirmar-se que os termos das sucessões  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , determinadas por  $(a, b)$  com  $a > b > 0$ , são os inversos dos termos das sucessões  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , respetivamente, para o par  $(1/b, 1/a)$ , sendo  $1/b > 1/a > 0$ . E, portanto, as sucessões  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são estritamente monótonas e convergem para

$$GH(a, b) := \frac{1}{AG(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})}.$$

A figura 2 representa a verde, a laranja e a azul os gráficos das funções  $AG$ ,  $AH$  e  $GH$  no domínio  $]0, 10[ \times ]0, 10[$ . A figura 3 contém informação sobre as sucessões descritas anteriormente e os limites  $AG(a, b)$ ,  $AH(a, b)$  e  $GH(a, b)$  para alguns pontos  $(a, b)$  do segmento  $\{(a, b) : a = 2, 0 < b < 2\}$ . Em particular, pode averiguar nesta imagem a propriedade de seguinte: como vimos, sendo  $a > b > 0$ , tem-se

$$b < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < a$$

e

$$GH(a, b) \in \left] \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab} \right], \quad AH(a, b) = \sqrt{ab},$$

$$AG(a, b) \in \left] \sqrt{ab}, \frac{a+b}{2} \right[.$$

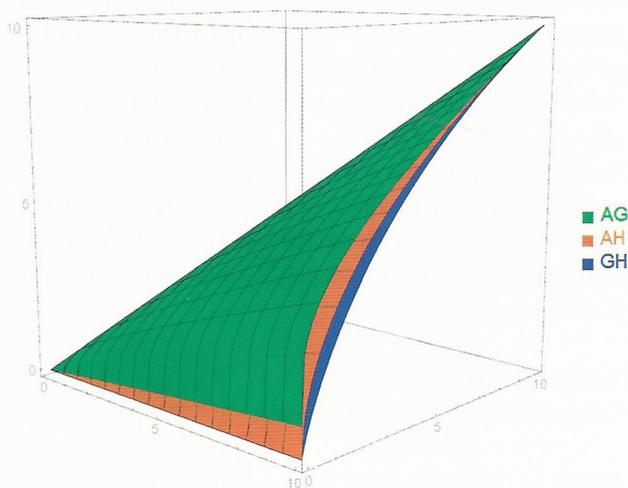


Figura 2.

Daqui resulta que

$$GH(a, b) < AH(a, b) < AG(a, b).$$

Os três procedimentos iterativos descritos anteriormente podem combinar-se numa ação aleatória conjunta das três médias  $AG$ ,  $AH$  e  $GH$ . Mais precisamente, consideremos as funções

$$\mathcal{F}_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(a, b) \mapsto \left( \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right)$$

$$\mathcal{F}_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(a, b) \mapsto \left( \frac{a+b}{2}, \frac{2ab}{a+b} \right)$$

$$\mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(a, b) \mapsto \left( \sqrt{ab}, \frac{2ab}{a+b} \right)$$

e, fixado um par  $(a, b)$ , lancemos um dado que tenha três faces numeradas com 1, 2 e 3, e em que faces opostas tenham o mesmo número. Se no primeiro lançamento sair a face  $i \in \{1, 2, 3\}$ , determinamos  $\mathcal{F}_i(a, b)$ ; se no segundo lançamento obtivermos a face  $j \in \{1, 2, 3\}$ , calculamos  $\mathcal{F}_j(\mathcal{F}_i(a, b))$ ; se de seguida surgir a face  $k$ , compomos  $\mathcal{F}_k(\mathcal{F}_j(\mathcal{F}_i(a, b)))$ ; e assim sucessivamente. Deste modo, obtemos uma órbita de  $(a, b)$  pelo sistema iterado de funções definido pelas aplicações  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$ , associada a uma dada sequência infinita de lançamentos do dado. Formalmente, cada órbita aleatória de  $(a, b)$  é uma sucessão de termo geral

$$n \in \mathbb{N}_0 \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}_{c_n} \circ \mathcal{F}_{c_{n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{F}_{c_1}(a, b) & \text{se } n \geq 1 \\ (a, b) & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

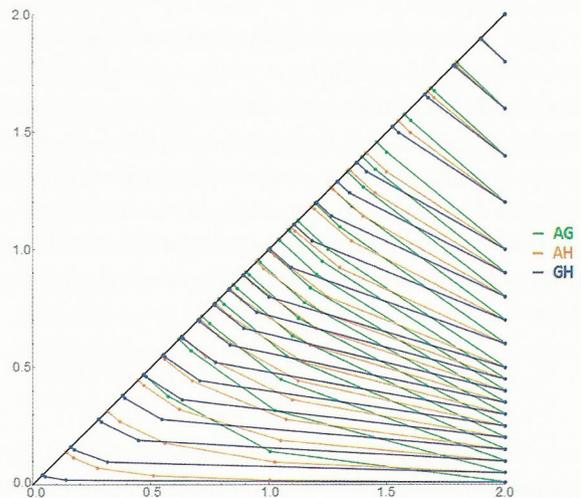


Figura 3.

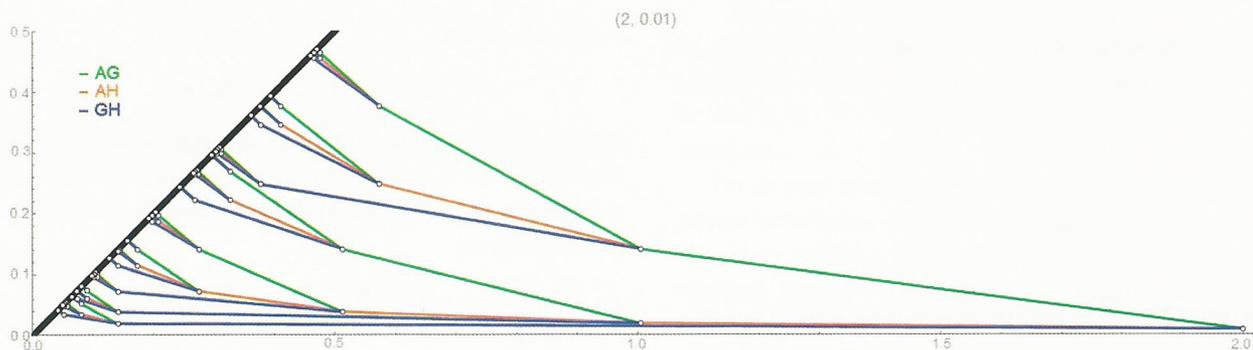


Figura 4.

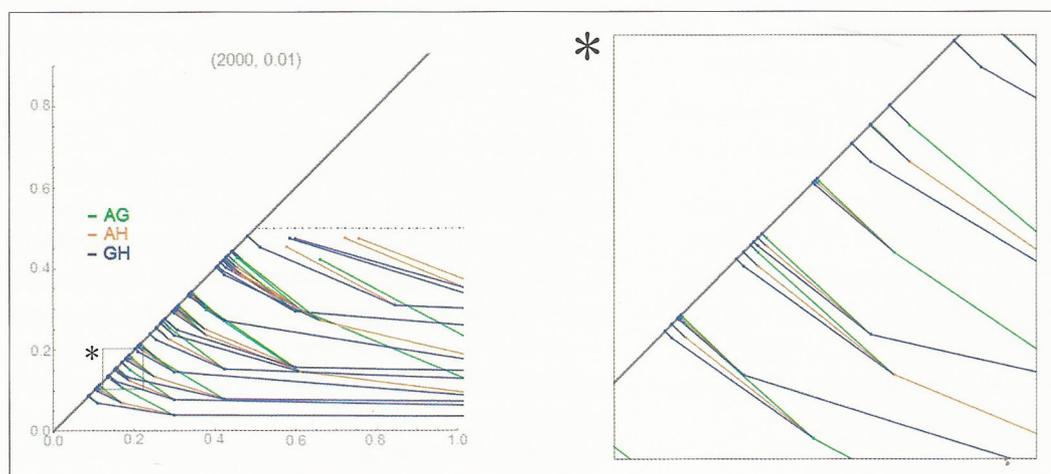


Figura 5.

onde  $c_j \in \{1, 2, 3\}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  descreve os resultados dos sucessivos lançamentos do dado. A figura 4 mostra os cinco primeiros iterados (ligados por segmentos para se reconhecerem mais facilmente) de todas as órbitas aleatórias de  $(2, 0.01)$ .

Pela análise anterior às médias combinadas AG, AH e GH, concluímos que o sistema iterado das funções  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$  tem como atrator global a diagonal  $\mathcal{A} = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$ , isto é, os pontos de acumulação de qualquer órbita aleatória estão em  $\mathcal{A}$ . Além disso, cada elemento de  $\mathcal{A}$  é fixo por esta dinâmica aleatória, por ser fixo por cada uma das três funções. Note-se ainda que, para  $j \in \{1, 2, 3\}$ , a matriz da aplicação derivada de  $\mathcal{F}_j$  em  $(a, a)$  é

$$D\mathcal{F}_j(a, a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e tem valores próprios  $\lambda = 1$  (cujo espaço próprio é a reta de equação  $y = x$ ) e  $\mu = 0$ , com espaço próprio que tem a direção da reta  $y = -x$ . O que implica que, próximo da

diagonal, as órbitas são fortemente atraídas para  $\mathcal{A}$  e tendem para este conjunto numa direção aproximadamente perpendicular à reta  $y = x$ . Atente-se a este pormenor nas figuras 3 e 4.

O Atrator produziu material interativo a propósito deste tema, acessível a partir de [1], que o leitor poderá explorar para determinar as médias combinadas de várias escolhas de  $(a, b)$ , visualizar de outros ângulos os gráficos das funções AG, AH e GH, ou identificar propriedades das órbitas aleatórias e dos seus pontos de acumulação usando a lupa que permitiu desenhar a figura 5 (que mostra os iterados aleatórios de  $(2000, 0.01)$  contidos na região  $\{(a, b) : 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 0.5\}$  e uma ampliação perto da diagonal).

## REFERÊNCIAS

[1] <http://www.atractor.pt/mat/medias>

[2] D. Cox. *The arithmetic – geometric mean of Gauss*. L'Enseignement Mathématique 30 (1984) 275-330.