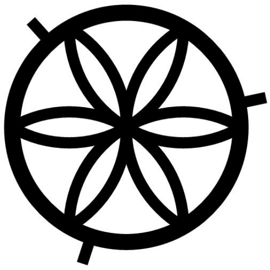
Simetria de uma figura plana [1]

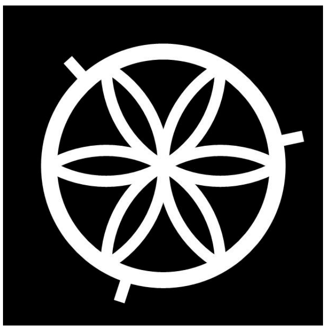
A noção de *simetria* de uma *figura* foi introduzida no DVD *Simetria - apresentação dinâmica*, produzido pelo Atractor, como *uma transformação do plano (sobre o plano), que conserva distâncias (isometria) e envia a figura exactamente sobre si própria, por forma que o aspecto seja o mesmo antes e depois da transformação, não devendo ser possível distinguir a figura inicial da final (nem em termos de forma, nem de posição, nem de cor).* Esta noção foi assim apresentada de forma propositadamente não técnica, dado o espírito do DVD. O leitor desejoso de definições precisas encontrá-las-á aqui.

1º caso: figuras de uma só cor (preta)

Em primeiro lugar, esclareçamos o que entendemos por uma *figura*. Neste caso (de uma só cor, digamos preta, além da do fundo, que supomos branca), podemos definir uma *figura* F do plano P como um subconjunto do plano $P\,(=\mathbb{R}^2)$: F é o conjunto de pontos *pintados* de preto. (Na imagem seguinte, estamos a supor que os indicados são todos os que são pretos, i.e., que fora da imagem mostrada, todos os pontos do plano são brancos.)



Dizer que a isometria g de P é uma *simetria de* F significa, por definição, que $g(F) = F$. Decorre desta definição que a *identidade de* P é uma *simetria* de qualquer figura de P - é, por isso mesmo, um caso trivial e sem interesse. Na imagem acima, a *figura* é o conjunto F assinalado a preto, se considerarmos que branco é a *cor de fundo*. E essa figura tem apenas duas simetrias não triviais: uma rotação (em qualquer dos sentidos) de 120^o e outra de 240^o, em torno do centro da imagem. Note-se que, para qualquer F, uma *simetria* de F é sempre uma bijecção de P sobre P, portanto, se $g(F) = F$, também $g(\complement F) = \complement F$, em que $\complement F$ designa o complementar de F em P. As *simetrias* de F coincidem com as *simetrias* do complementar de F: $\complement F$. (Na imagem seguinte, estamos a supor que, fora da imagem mostrada, todos os pontos do plano são pretos.)



Esta *figura* corresponde exactamente ao conjunto complementar do correspondente à anterior e, portanto, também tem só as mesmas duas simetrias não triviais.

Outra forma de descrever uma figura é a seguinte: uma *figura* é vista como uma função $f: \; P \; \rightarrow \; \{0,1\}$. Esta é uma segunda definição (alternativa) de *figura de uma só cor*. A cada ponto do plano, associa-se uma de duas cores: cor 0 (branca), se o ponto não pertence à *figura* (no sentido anterior), cor 1 (preta) se pertence. Portanto, dada uma *figura F no 1º sentido*, a *figura* correspondente *no 2º sentido* é:

$$\begin{array}{rcccl} \varkappa_F: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \{0,1\} & \\ & x & \rightarrow & 1 & se\ x \in F \\ & x & \rightarrow & 0 & se\ x \notin F \end{array}$$

(χ_F diz-se a função característica de F em $P = \mathbb{R}^2$)

Reciprocamente, dada uma *figura* $f: \; \mathbb{R}^2 \; \rightarrow \; \{0,1\}$ *no 2º sentido*, a figura correspondente *no 1º sentido* é $F = f^{-1}(\{1\}) \subset \mathbb{R}^2$.

[1] Ver http://www.atractor.pt/mat/orbifolds/info.htm

Como se exprime então, *usando esta 2ª definição de figura*, a noção de *simetria*, anteriormente introduzida usando a *1ª definição de figura*?

Teremos de exprimir que uma isometria $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envia $f^{-1}(\{1\})$ sobre $f^{-1}(\{1\})$ e, portanto, $f^{-1}(\{0\})$ sobre $f^{-1}(\{0\})$. Isto quer dizer que um ponto de cor 1 é enviado num ponto de cor 1 e um ponto de cor 0 é enviado num ponto de cor 0, por outras palavras, g respeita as cores. Ou seja, $f(g(x)) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Isto pode-se exprimir dizendo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "f"] \\ & \{0,1\} & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

As simetrias da figura $f: \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ são, pois, as isometrias g de $\mathbb{R}^2$ que tornam este diagrama comutativo.

N.B. - Embora, nesta segunda definição, intervenham duas cores - 0 e 1, é habitual falar em *figura de uma só cor*, ignorando-se a cor do fundo. Se quiséssemos evitar estar sempre a falar em *figura* num sentido e no outro, poderíamos escolher a segunda definição uma vez por todas e chamar a $f^{-1}(\{1\})$ o conjunto-suporte da figura f. Por exemplo, com esta terminologia, uma figura f seria limitada se e só se o seu conjunto-suporte o fosse. Mas não é habitual utilizar este preciosismo de linguagem.

2º caso: figuras com qualquer número de cores

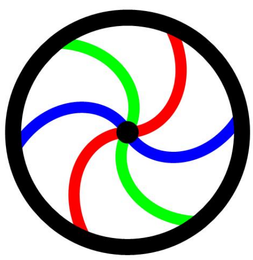
A segunda definição que demos para uma *figura* seria perfeitamente dispensável se apenas quiséssemos considerar *figuras de uma só cor* (ver nota anterior). Mas é precisamente uma generalização desta segunda definição que permite englobar figuras com mais de uma cor (eventualmente com uma infinidade de cores).

Se E é um espaço de cores[2], dar uma *figura* plana com essas cores consiste em escolher, para cada ponto do plano, uma cor desse espaço, isto é, dar uma função f de $\mathbb{R}^2$ em E. Se, em E, assinalarmos uma cor c_0 como *cor de fundo* (por exemplo, $c_0 =$ branco), podemos considerar $\mathbb{R}^2$ repartido em dois conjuntos $f^{-1}(\{c_0\})$, o *fundo*, e o seu complementar $F = \{f^{-1}(E\backslash\{c_0\})\}$, que pode ser visto como o conjunto-suporte da figura colorida – é o conjunto dos pontos que estão *efectivamente coloridos*.

Uma *simetria* da figura f é uma isometria g do plano que respeita as cores, i.e., que envia qualquer ponto x (de cor $f(x)$) num ponto $g(x)$ com a mesma cor ($f(g(x)) = f(x)$). Por outras palavras, uma *simetria* da figura f é uma isometria g do plano, que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "f"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

A figura representada na imagem seguinte tem como única simetria não trivial uma rotação de 180º (meia volta) em torno do centro da imagem (estamos a supor que todos os pontos de P, fora da imagem, são brancos).



[2] O espaço de cores pode ser um conjunto finito como {branco, preto, vermelho, verde, azul} ou infinito como $[0,1]^3 = \{(r,g,b) : r,g,b \in [0,1]\}$ (sistema RGB). Por exemplo, neste sistema, vermelho $= (1,0,0)$, verde $= (0,1,0)$, azul $= (0,0,1)$, violeta $= (1,0,1)$, verde-claro $= (0.7,1,0.7)$, etc.